

由夸克- π 相互作用引起的夸克自能

顾英圻 马中玉 卓益忠
(中国原子能科学研究院)

摘 要

本工作采用非定域夸克- π 相互作用计算夸克自能, 其结果自能是收敛的。基于计算结果的分析, 我们认为夸克自能发散的原因是考虑点相互作用近似而引起的。

一、引 言

现在人们普遍认为, 量子色动力学 (QCD) 很可能是强相互作用最合适的动力学理论。由于理论的非线性性质, 目前还很难得到 QCD 的精确解, 但认为它应具备禁闭和渐近自由的性质。1974年 Chodos 等人就是根据这些特性提出了唯象的 MIT 口袋模型^[1]来解释强子结构问题。为保证模型的手征对称性, Brown 等人在 1979 年又提出了小口袋模型^[2]。1980年 Thomas 和 Miller 等人提出了 Cloudy 口袋模型^[3]。这些唯象模型的物理图象清楚, 计算方便, 尤其是他们在强子静态性质的计算上取得的成功引起了人们的兴趣和关注, 并用这些模型讨论核力, $N-\pi$ 散射等许多问题。随着工作的深入, 自能问题已提到日程上来, 自能是场论中进行微扰计算时必须考虑的问题。夸克的自能包括交换胶子和交换 π 两种过程, 已有人计算证明, 胶子引起的自能是有限的^[4], 而由 π 引起的自能是发散的, 且是线性发散的^[5,6]。Nogami^[7] 等人分析了引起发散的原因, 他们认为引起发散的原因有二: 一是因为口袋的尖锐边界而引起的, 二是由于近似地考虑夸克和 π 场为点相互作用而引起的。他们认为仅仅改变边界情况或仅考虑 π 的大小不能消除自能发散问题。Miller^[8], Saito^[9] 等人采用了不同的方法来消除自能发散。在本工作中我们考虑非定域的夸克- π 相互作用, 得到收敛的自能, 因此我们认为这个自能发散是由于没有考虑 π 的大小而引起的。

第二节中用量子场论的微扰方法导出了考虑夸克- π 非定域相互作用的自能公式。第三节是计算结果和讨论。第四节我们将计算 N, Δ 粒子质量。

二、自能公式

因为 MIT 口袋模型还是比较成功的, 所以可以将耦合到口袋表面上的 π 场作用效

能

果看做是 MIT 口袋的高级修正, 当做微扰来处理. MIT 口袋和袋外自由 π 场的解是零级解, 组成零级波函数, 然后在球腔近似下计算自能. 手征口袋的线性化的拉格朗日密度可写为:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{CB} &= \left[-\frac{1}{2} \bar{q} \not{\partial} q - B \right] \theta(R-r) - \frac{1}{2} (\partial_\mu \Pi)^2 \theta(r-R) + \mathcal{L}_I \\ &= \mathcal{L}_{CB}^0 + \mathcal{L}_I \end{aligned} \quad (2.1)$$

其中 q, π 分别是夸克和 π 场波函数, R 是口袋半径, θ 是阶梯函数. Chin^[5] 用点相互作用得到夸克自能是发散的. 在夸克层次上, 在口袋模型中对 π 用点近似是不合适的. 我们将 π 看做有大小而考虑夸克和 π 场的非定域相互作用, 希望在考虑这个因素后能解决自能发散问题. 相互作用取为如下形式:

$$\mathcal{L}_I = \frac{-i}{2f_\pi} \int d^3\eta e^{-\eta^2/\Delta^2} \frac{1}{\pi^{3/2}\Delta^3} \bar{q}(\mathbf{x}, t) \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\pi}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\eta}, t) I_c q(\mathbf{x}, t) \delta(r-R) \quad (2.2)$$

f_π 是 π 介子衰变常数, I_c 是色单位矩阵. 在 \mathcal{L}_I 中我们简单地取非定域相互作用为高斯分布, 即两个场的相互作用发生在口袋表面的一个区域内. 参数 $\Delta = \sqrt{2} \cdot 0.17 \text{ fm}$, 0.17 是 π 介子大小. 由 \mathcal{L}_{CB}^0 可得到夸克、 π 场的方程, 同时考虑边界条件.

夸克场:

$$\begin{aligned} i\not{\partial}\psi &= 0 & r < R \\ i\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{f}\psi &= \psi & r = R \end{aligned} \quad (2.3)$$

π 场:

$$\begin{aligned} \partial_\mu^2 \Pi &= 0 & r > R \\ \boldsymbol{f} \cdot \nabla \Pi &= 0 & r = R \end{aligned} \quad (2.4)$$

求解方程可得到夸克场的完备解为:

正能解:

$$\mathcal{U}_{v\kappa}^{\mu+}(\mathbf{r}) = A_{v\kappa} \begin{pmatrix} j_l(\chi_{v\kappa} r/R) \\ -i \operatorname{sgn}(\kappa) j_l - (\chi_{v\kappa} r/R)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{f}) \end{pmatrix} \chi_{v\kappa}^{\mu+} \quad (2.5)$$

负能解:

$$\mathcal{V}_{v\kappa}^{\mu-}(\mathbf{r}) = A_{v\kappa} \begin{pmatrix} i \operatorname{sgn}(\kappa) j_l - (\chi_{v\kappa} r/R)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{f}) \\ j_l(\chi_{v\kappa} r/R) \end{pmatrix} \chi_{v\kappa}^{\mu-} \quad (2.6)$$

$A_{v\kappa}$ 是归一化系数

$$A_{v\kappa} = R^{-3/2} |j_l(\chi_{v\kappa})|^{-1} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\chi_{v\kappa}}{\chi_{v\kappa} + \kappa} \right\}^{1/2} \quad (2.7)$$

$\chi_{v\kappa}^{\mu\pm}$ 是泡利旋量, j_l 是球贝塞尔函数.

$$\begin{aligned} j &= |\kappa| - \frac{1}{2} \\ l &= j + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\kappa) \\ \bar{l} &= j - \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\kappa) \end{aligned} \quad (2.8)$$

$K = \beta(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{l} + 1)$ 的本征值.

敛的.
近似而

的动力学理
具备禁闭和
MIT 口袋模
型又提出了
这些唯象
成功引起了
研究的深入,
夸克的自
能的^[4], 而由
其原因, 他
们似地考虑
与大小不能
在本工作
自能发散是

能公式. 第

场作用效

π 场的解空间部分为:

$$\begin{aligned}\phi_{kJM}(\mathbf{r}) &= \phi_{kJ}(r)Y_{JM}(\hat{r}) \\ \phi_{kJ}(r) &= \frac{1}{2} [e^{i\delta_j} h_j(kr) + e^{-i\delta_j} h_j^*(kr)]\end{aligned}\quad (2.9)$$

由边界条件知

$$e^{2i\delta_j} = -\frac{h_j^{*'}(kR)}{h_j'(kR)}\quad (2.10)$$

然后可得夸克、 π 场的零级格林函数.

$$iG_0(x_1, x_2) = \langle \phi_0 | T[\phi(x_1)\bar{\phi}(x_2)] | \phi_0 \rangle\quad (2.11)$$

$$i\Delta_{ij}^0(x_1, x_2) = \langle 0 | T[\Pi_i(x_1)\Pi_j(x_2)] | 0 \rangle = i\delta_{ij}\Delta^0(x_1, x_2)\quad (2.12)$$

考虑相互作用, 计算 \mathcal{L}_1 中对 η 的积分, 为简化计算, 我们将 π 场的零级波函数近似地取为平面波, 则在 \mathcal{L}_1 中和 η 积分有关的部分可写为:

$$\mathcal{L}_1 \sim \sum_{\mathbf{k}} \int d^3\eta e^{-\eta'/\Delta^2} \frac{1}{\pi^{3/2}\Delta^3} i\bar{q}(\mathbf{x}, t) \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot e^{\pm i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}+\boldsymbol{\eta})} e^{\mp i\omega_{\mathbf{k}}t} q(\mathbf{x}) \delta(r-R)$$

积分结果是:

$$\sum_{\mathbf{k}} i\bar{q}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot e^{\pm i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e^{\mp i\omega_{\mathbf{k}}t} q(\mathbf{x}) \delta(r-R) e^{-\xi^2\Delta^2/2R^2}\quad (2.13)$$

考虑这样的非定域相互作用效果相当于增加了一个 $e^{-\xi^2\Delta^2/2R^2}$ 的因子.

下面我们将用量子场记中的微扰方法来导出自能公式. 相互作用哈密顿密度是:

$$\mathcal{H}_1 = \frac{i}{2f_\pi} \sum_{\mathbf{k}} i\bar{q}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \Pi_{\mathbf{k}} q(\mathbf{x}) \delta(r-R) e^{-\xi^2\Delta^2/2R^2}\quad (2.14)$$

仅考虑二级微扰, 能移是:

$$\begin{aligned}\Delta E &= E - E_0 \\ &= \left\langle \phi_0 \left| \frac{-i}{2} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \delta(t_1) T[\mathcal{H}_1(x_1)\mathcal{H}_1(x_2)] \right| \phi_0 \right\rangle \\ &= E_{dr} + E_{ex} + E_{sf}\end{aligned}$$

E_{dr} , E_{ex} , E_{sf} 分别是直接项, 交换能和自能.

$$\begin{aligned}E_{dr} + E_{ex} &= -\frac{1}{12\pi} \frac{1}{f_\pi^2 R^2} \left(\frac{x_{1-1}}{x_{1-1}-1} \right)^2 \varepsilon_0 [9 - S(S+1) - I(I+1)] \\ &= E_{dr+ex} \cdot S_0\end{aligned}\quad (2.15)$$

其中

$$S_0 = 9 - S(S+1) - I(I+1)\quad (2.16)$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\xi \frac{1}{\xi^2 + 4\xi^{-2}} e^{-\xi^2\Delta^2/2R^2}$$

$$\begin{aligned}E_{sf} &= \frac{1}{2f_\pi^2 R^2} \sum_{JM} \sum_n \sum_{n' \leq n_F} \frac{2}{\pi} \int dk k^2 \phi_{kJ}^2(kR) \cdot e^{-\xi^2\Delta^2/2R^2} \\ &\quad \cdot \left[\frac{|T_{JM}(n, n')|^2}{E_{n'} - E_n - k + i\varepsilon} + \frac{|T_{JM}(\bar{n}, n')|^2}{E_{n'} + E_n + k - i\varepsilon} \right]\end{aligned}\quad (2.17)$$

其中

最后

结果
考虑了
增高
60,
果是
式,

耦合
是

$$T_{JM}(n', n) = R^3 \langle \mathcal{O}_{n'}(R) | i\gamma_5 \mathbf{t} I_c Y_{JM}(\mathbf{r}) | u_n(R) \rangle \quad (2.18)$$

$$T_{JM}(\bar{n}, n') = R^3 \langle \mathcal{O}_{\bar{n}}(R) | i\gamma_5 \mathbf{t} I_c Y_{JM}(\mathbf{r}) | u_{n'}(R) \rangle \quad (2.19)$$

(2.9)

最后得到:

$$E_{ij}(\nu', \kappa') = -\frac{9}{8\pi} \frac{1}{f_\pi^2 R^2} \frac{1}{R} \varepsilon_{\nu'\kappa'} \quad (2.20)$$

(2.10)

$$\varepsilon_{\nu'\kappa'} = 2|\kappa'| \left(\frac{\chi_{\nu'\kappa'}}{\chi_{\nu'\kappa'} + \kappa} \right) \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\xi \sum_{\kappa} 2|\kappa| \sum_J (2J+1) \xi \phi_J^2 \left[\begin{matrix} j' & J & j \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{matrix} \right]^2$$

(2.11)

(2.12)

$$\cdot \frac{1}{2} [1 - (-1)^{J+l+l'}] \sum_{\nu} \left\{ \frac{\chi_{\nu\kappa}}{\chi_{\nu\kappa} + \kappa} \cdot \frac{1}{\chi_{\nu\kappa} - \chi_{\nu'\kappa'} + \xi} - \frac{\chi_{\nu-\kappa}}{\chi_{\nu-\kappa} - \kappa} \cdot \frac{1}{\chi_{\nu-\kappa} + \chi_{\nu'\kappa'} + \xi} \right\} \cdot e^{-\xi^2 \Delta^2 / 2R^2} \quad (2.21)$$

函数近似

三、结果和讨论

(2.13)

我们用 (2.2) 式的夸克- π 非定域相互作用计算了 $1S_{1/2}$, $1P_{3/2}$, $1P_{1/2}$ 态的夸克自能, 结果列在表 1 中。计算时对 ν 求和到 60, 取 $R = 1\text{fm}$ 。从表 1 的结果中可以看出, 在考虑了 π 的大小之后, 自能确实是收敛的, 在 $\kappa = 18$ 处时便可达到稳定, 随夸克态能量的增高自能值也增加。Oset 分析指出自能对 ν 的求和是收敛的^[6]。我们取 $\nu = 10, 20, 40, 60, 80$ 进行了数值计算, 结果显示在图 1 中, 随 ν 的增加确实是收敛的。图 1 中的计算结果是 ε_{1-1} 随 ν 的变化情况。我们曾试图希望得到加上形状因子后自能收敛的解析分析式, 但因渐近形式较复杂, 很难给出清晰的结果。

度是:

(2.14)

表 1 用非定域相互作用计算 (ν', κ') 态夸克自能的结果

$\nu' \kappa'$	$\nu' \kappa'$		
	$1S_{1/2}(1, -1)$	$1P_{3/2}(1, -2)$	$1P_{1/2}(1, 1)$
κ			
1	1.50	5.20	0.83
2	2.57	9.38	3.79
3	3.23	11.66	5.34
4	3.56	12.50	6.48
5	3.66	12.38	7.33
6	3.62	11.74	7.94
10	3.19	8.74	8.97
14	3.05	7.84	9.12
18	3.03	7.74	9.13
22	3.03	7.68	9.13

(2.15)

(2.16)

(表中 κ 栏所列的数是表示对 κ 求和到此值)

(2.17)

关于引起自能发散的原因, Chin 首先提出是由于不真实的尖锐口袋表面的夸克- π 耦合。另外我们必须提及的是 Nogami^[7] 等人的分析, 他们认为引起发散的原因有二, 一种是通常量子场论中常遇到的因考虑点相互作用而引起的发散; 另一种是由原始 MIT

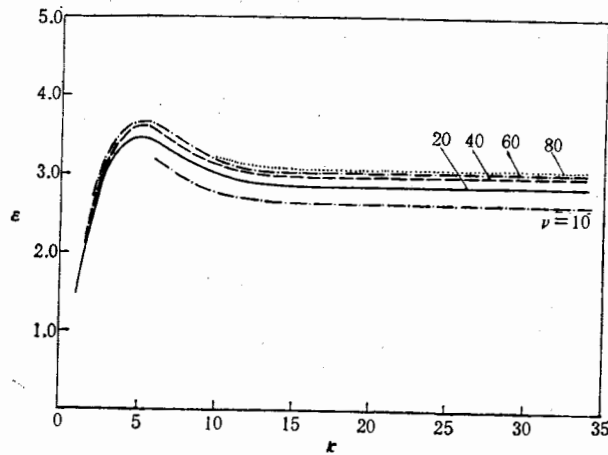


图 1 计算 ε_{i-1} 随 ν 的变化. $R = 1\text{fm}$, ν 求和分别到 10, 20, 40, 60, 80

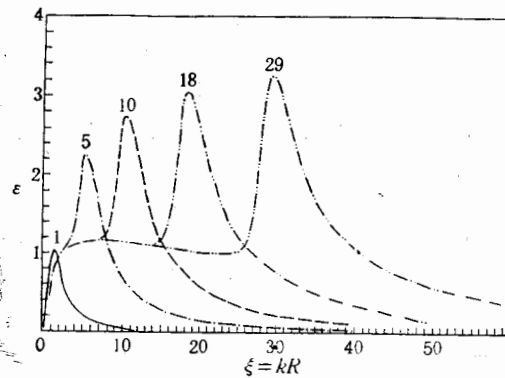


图 2 点相互作用时, $\varepsilon_{\nu, \kappa}$ 随 ξ 的变化, 图中显示的是分别对 κ 求和到 1, 5, 10, 18, 29 的结果

口袋中存在的尖锐边界而引起的。他们认为, 因为边界是尖锐的, 夸克- π 相互作用中动量是不守恒的, 可以提供任意大动量来促使夸克激发, 即使 π 的动量被限制为很小的值, 夸克仍然可以激发到任意能量, 求和结果仍是发散的, 也就是说即使加一个形状因子切断了大动量 π 的贡献, 但对大 κ 的夸克的贡献仍不能去除。我们认为虽然夸克- π 相互作用过程中能量不守恒, 因边界尖锐则动量也不守恒, 但它们二者之间存在有角动量的关联, 由于角动量的守恒, 切断了大动量 π 的贡献同时也切断了夸克的高激发态。这点也可由图 2 中的计算结果看出。图 2 中画的是 (2.21) 式中被积函数随 ξ 的变化, 考虑基态夸克, 无 $e^{-\xi^2 \Delta^2 / 2R^2}$ 因子情况时的计算, κ 求和分别是 1, 5, 10, 18, 29。由图中可看到大 κ 的贡献主要在大动量处。Nogami 的文章中还假设了一个“Fuzzy 口袋”模型, 他们考虑口袋边界不再像 MIT 口袋那样尖锐, 而是有弥散边界的, 他用这样一个模型进行了分析, 仍得到发散自能。从我们的计算看, 仅考虑 π 的大小, 便可以得到收敛的自能, 因此我们认为自能发散主要是因为考虑点相互作用近似而引起的。考虑口袋边界的弥散也许会

算的
子的
随 R
个处
 Δ 不
将考

点修
子,
胶子
胶子

(m, k)

其中

π 贡

考虑

由此
四个
2.52.

加快自能的收敛。

四、 N 、 Δ 粒子质量的计算

我们的计算中仅考虑了无质量的 u 、 d 夸克, 所以无法计算整个强子谱, 我们用所计算的自能结果重新调节参数来符合核子和 Δ 粒子的质量。我们首先计算了自能 E_{sf} 和 $E_{dr+\pi}^0$ 随 R 的变化情况, 结果表示在图 3 中, E_{sf} 是三个处于 $1S_{1/2}$ 态夸克自能的和, S_0 的值对 N 、 Δ 不同粒子分别是 7.5 和 1.5, 在计算 $E_{dr+\pi}$ 时将考虑进去。考虑口袋的总能量是:

$$M(R) = \frac{3x_{1-1}}{R} + \frac{4\pi}{3} BR^3 - \frac{Z_0}{R} + \Delta E_G + \Delta E_x \quad (4.1)$$

等式右边顺序是口袋动能, 口袋体积能, 零点修正和质心运动能 (Z_0 作为参数), 夸克与胶子, 夸克与 π 相互作用能。我们没有直接计算胶子部分的贡献, 在此取他人的计算结果而用。胶子部分如下:

$$\Delta E_G = \Delta E_G^m + \Delta E_G^c + \Delta E_G^f \quad (4.2)$$

通常由胶子的色磁, 色电部分相互作用贡献及自能三部分组成, 其中 $\Delta E_G^c \cong 3.1C \times (m_\pi R)^{[9]}$, 对 N 、 Δ 粒子, $C = 0$ 。我们计算中没有包含夸克夸克。

$$\Delta E_G^m = \frac{\alpha_c}{R} a_{nn} M_{nn}^{[9,10]} \quad (4.3)$$

$$\Delta E_G^f = \frac{\alpha_c}{R} C_1^{[11]} \quad (4.4)$$

其中:

$$a_{nn} = \begin{cases} -2 & \text{对 } N \\ 2 & \text{对 } \Delta \end{cases}$$

$$M_{nn} = 0.177, \quad C_1 = 1.25$$

π 贡献的部分是:

$$\Delta E_x = \Delta E_x^f + \Delta E_x^{dr+\pi} \quad (4.5)$$

考虑二次边界条件, 按通常做法取:

$$\frac{dM(R)}{dR} = 0 \quad (4.6)$$

由此可确定口袋半径。用 (4.1) 和 (4.6) 式符合核子和 Δ 粒子质量来调节 R_N , α_c , B , z_0 四个参数, 取 Δ 粒子半径 $R_\Delta = 1.11 \text{ fm}$, 调节结果有 $R_N = 0.95 \text{ fm}$, $\alpha_c = 1.87$, $Z_0 = 2.52$, $B = 0.24 (B^{1/4} = 140 \text{ MeV})$; 表 2 中给出了用这些参数计算的各部分能量, 和 MIT

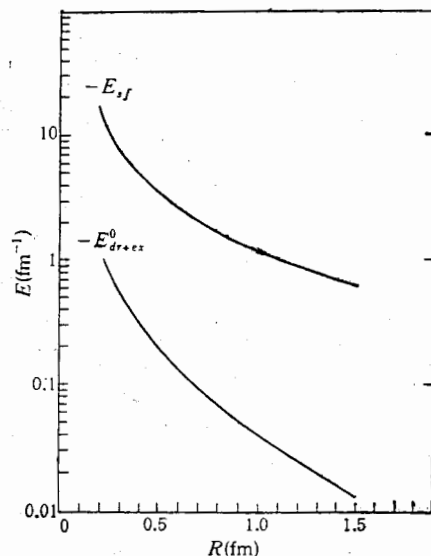


图 3 自能 E_{sf} 、 $E_{dr+\pi}^0$ 随 R 的变化

用中动
小的值,
子切断
相互作用
的关联,
点也可
基态夸
到大 π
们考虑
行了分
因此我
也许会

口袋相比,口袋半径有所改进,零点能增高, α_c 略有下降。但由于 π 与胶子的贡献是相互抵消的,因此加上自能后总的结果对 MIT 口袋模型原有参数修正不是很大。

表 2 用 $R_\Delta = 1.11\text{fm}$, $R_N = 0.95\text{fm}$, $\alpha_c = 1.87$, $Z_0 = 2.52$, $B = 0.24$
计算的粒子质量及各部分能量的结果

粒子	$E_r(\text{fm}^{-1})$	$E_s(\text{fm}^{-1})$	$E_0(\text{fm}^{-1})$	$E_f(\text{fm}^{-1})$	$E_g(\text{fm}^{-1})$	$M(\text{fm}^{-1})$	$M(\text{MeV})$
N	6.467	0.844	-2.662	1.768	-1.663	4.754	938
Δ	5.522	1.356	-2.273	2.703	-1.063	6.244	1232

参 考 文 献

- [1] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn and V. F. Weisskopf, *Phys. Rev.*, **D9**(1974), 3471.
 [2] G. E. Brown and M. Rho, *Phys. Lett.*, **82B**(1979), 177.
 [3] S. Theberge, A. W. Thomas and G. A. Miller, *Phys. Rev.*, **D22**(1980), 2838; **D23**(1981), 2106(E).
 [4] S. A. Chin, A. K. Kerman and X. H. Yang, MIT CTP 919 (1981).
 [5] S. A. Chin, *Nucl. Phys.*, **A382**(1982), 355.
 [6] E. Oset, *Nucl. Phys.*, **A411**(1983), 357.
 [7] Y. Nogami and A. Suzuki, *Prog. of Theo. Phys.*, **69**(1983), 1184.
 [8] G. A. Crawford and G. Miller, Ref. TH. 3645-CERN June (1983).
 [9] K. Saito, INS-Rep.-481 Oct. (1983).
 [10] X. H. Yang, Y. S. Zhong and T. S. Cheng, PUTP 84-09.
 [11] X. H. Yang and A. K. Kerman, *Commun. Theor. Phys.*, **3**(1984), 231.

QUARK SELF-ENERGY DUE TO QUARK-PION INTERACTION

GU YING-QI MA ZHONG-YU ZHUO YI-ZHONG

(Institute of Atomic Energy, Beijing)

ABSTRACT

In this paper the quark self-energy with nonlocal quark-pion interaction is calculated and the convergent self-energy is obtained. Based on the results it is found that the divergence is merely due to the assumption of pointlike pion made in the calculation.

况下
些永
磁场
磁场
间的

个

况。
表示

我们

(向)

2, r