

二维随机格点 $SU(2) \times SU(2)$ 自旋系统的 Monte-Carlo 模拟

李文铸 应和平 董绍静
(浙江大学物理系)

摘 要

本文对 8×8 , 9×9 和 10×10 三种二维随机格点阵的 $SU(2) \times SU(2)$ 手征模型进行了 Monte Carlo (M-C) 模拟, 得到了链作用形式的内能和比热结果. 计算结果表明: 当 $\beta \geq 1.0$ 以后, 系统进入过渡区, 但无明显的连续相变迹象; 其统计涨落则由于有限体积引起的边界效应而致. 结果与四维随机格点的 $SU(2)$ 理论之 Monte Carlo 计算基本一致^[5,6]. 从而我们相信, 在新的随机格点形式下, 亦可能存在 4 维 $SU(N)$ 规范理论和 2 维 $SU(N) \times SU(N)$ 自旋系统的一致性.

一、引 言

4 维 $SU(N)$ 格点规范理论和 2 维 $SU(N) \times SU(N)$ 手征模型的对应性早就引起了人们的极大兴趣. 后者作为一种简单明确, 计算量少以及与统计系统直接相关的模型, 可以为研究和发现前者的基本性质和特殊性带来深刻的启发和帮助; 亦有助于验证前者的一些基本概念和思想. 尤其为前者在相变和临界区域的讨论带来较大的方便性. Migdal 和 Polyakov 首先注意并开始了在这方面的研究^[1,2]. 至今, 已发现和证实了一系列关于 D 维手征模型和 $2D$ 维格点规范理论的对应关系和一致的方面^[3,4], 使得对手征模型的研究成为一种研究格点规范理论的有效方法; 使得手征模型成为一种重要的自旋系统.

我们在 2 维随机格点阵上 (8×8 , 9×9 , 10×10), 对最基本的 no-Abel 群的 $SU(2) \times SU(2)$ 手征模型作了 Monte Carlo 模拟. 得到了内能 (Average link) 和比热的温度曲线. 结果表明此系统在 $\beta \geq 1.0$ 以后, 进入了过渡区 (Cross-over region). 过渡区始点随格点阵变化漂移的现象则由于有限体积引起的边界效应和“淬火”假设 (Quenched Approx.) (此种假设不同于规范理论的“淬火”近似) 而致.

二、随机格点理论和“近邻”相互作用自旋模型

1982 年 Christ、Friedberg 和 T. D. Lee 提出了一种新的格点规范理论——随机格

点规范理论
不变要素
值得深入
符^[5,6].以
在 L
个格点
点构成;
且在此
个格点
重叠地
平均日

其中 N_D

式中 ρ
为:

利用(2.1
则通过定

构造场作

来完成.

有正确前
件).

引起
格点形式

就直接在
的自旋格

$D = 3$,

(ii) 通过
自旋模型
一种自旋
系统的研

自旋

(2) $\times SU(2)$
 内能和比热结
 为连续相变迹
 随机格点的
 的随机格点
 自旋系统

点规范理论^[7]。此理论直接恢复了连续场论的平移和 Lorentz 不变性,保证了局域规范不变要求,适用于数值计算方法。较之 Wilson 提出的立方格点规范理论^[8]有其特点和值得深入研究的价值。其 $U(1)$, $SU(2)$ 和 $SU(3)$ 的 Monte-Carlo 计算结果与实验相符^[5,6]。以下我们简洁地回顾一下随机格点规范理论的基本概念(详细的理论见文献[7])。

在 D 维空间 Q 中,有 N_D 个独立地随机分布和各向同性格点 (sites)。空间 Q 被此 N_D 个格点分立成满足如下条件的单位元——原胞 (simplices)。任何原胞由 $(D+1)$ 个格点构成;此 $(D+1)$ 个格点处在由此 $(D+1)$ 个格点决定的 $(D-1)$ 维外接球面上,且在此广义球面内不存在任何格点。每个原胞中的任二个格点以链 (Link) 相接,任三个格点构成一个原格 (Plaquette) Δ_p 。可以证明,整个空间 Q 能够被如此定义的原胞没有重叠地填满。任何定义在原胞内的函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_{D+1})$ 关于随机格点的位置组态的平均由下式给出:

$$\langle f \rangle = (1/N_D) \cdot \int \prod_{i=1}^{D+1} \{f(x_i, \dots, x_{D+1}) \mathcal{D}(x_1, \dots, x_{D+1})\}. \quad (2.1)$$

其中 N_D 为 Q 中的原胞数, \mathcal{D} 为分布函数:

$$\mathcal{D}(x_1, \dots, x_{D+1}) = (1/(D+1)!) \rho^{D+1} e^{-\nu \rho} \quad (2.2)$$

式中 $\rho = N_D/Q$ 为格点密度, ν 为 $(D+1)$ 个格点构成的外接球之积。其归一化条件为:

$$\int \mathcal{D}(x_1, \dots, x_{D+1}) \prod_{i=1}^{D+1} d^D r_i = N_D. \quad (2.3)$$

利用(2.1)——(2.3),我们可以计算定义在原胞内的物理量之平均值。随机格点规范理论则通过定义在链上的规范场 $U(i, j)$ 和定义在原格 Δ_p 上的规范场有序积

$$U_p = U(i, j)U(j, k)U(k, i)$$

构造场作用量

$$A_{R.L} = (1/g^2) \sum_{\Delta_p} \kappa_p f(U_p). \quad (2.4)$$

来完成。式中 $f(U_p)$ 是作用量函数, κ_p 为权重因子,使 $A_{R.L}$ (附标指 Random Lattice) 有正确的连续极限形式: $A_{R.L} \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} A_{Y-M}$ ($\rho \rightarrow \infty$ 是随机格点形式下的连续极限条件)。

引起注意的事是,按原胞构成而定义的链在统计自旋模型的意义可推广为在新的格点形式下的“近邻”相互作用 (nearest-neighbour interaction)。即通过对对应,

$$\text{Site } i \rightarrow \text{Spin } S_i; \quad \text{Link } U_{ij} \rightarrow \text{Interaction } J_{ij}$$

就直接在随机格点在定义了统计自旋模型,且具有“近邻”相互作用形式(图1)。这种新的自旋模型具有以下特点: (i) 它包括了比规则格点形式更多的近邻链 ($D=2, l=6, D=3, l=16$), 使得“近邻”相互作用包括了“准近邻”作用修正(相对于规则格点而言)。 (ii) 通过对随机格点作分布统计平均(2.1)处理,可以计算与距离有关的相互作用形式的自旋模型,如振荡型和衰减相互作用形式。 (iii) 建立了一种适合于 $M-C$ 模拟方法的一种自旋系统,可望解决某些统计模型计算中的困难,获得较好的数值结果,有助于自旋系统的研究。

应性早就引起了
 相关的模型,可
 助于验证前者的
 方便性。Migdal
 实了一系列关于
 对手征模型的研究
 自旋系统。

no-Abel 群的
 e link) 和比热
 region)。过
 “假设 (Qu

论——随机

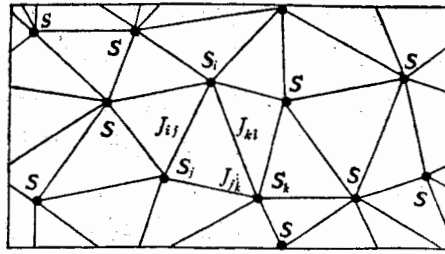


图 1 随机格点自旋模型。S_i-自旋, J_{ij}-近邻相互作用

三、SU(2) × SU(2) 手征模型

在上节定义的随机格点上考虑如下的二维手征模型：每个格点上定义 SU(2) 群元 U_i，并与近邻格点 U_{i+l_i} 耦合。作用量为：

$$A_{R,L} = (1/2) \sum_{i,l_i} \text{Tr}_F [I - U_i^+ \cdot U_{i+l_i}] + \text{h.c.} \quad (3.1)$$

其中，Tr_F 表示在基本表象求迹，l_i 表示近邻格点。模型的整体变换群是 SU(2) × SU(2)/Z₂

$$U_i \rightarrow U'_i = V_L \cdot U_i \cdot V_R \quad (3.2)$$

V_L 和 V_R 为独立的与空间位置无关的 SU(2) 群元。显然，在(3.2)式变换下，作用量 A_{R,L} 保持不变。且从以下的讨论看出，此手征模型等价于 0(4) 自旋模型，为一自旋系统。

在基础表象中，用单位阵 σ₀ 和 Pauli 阵 σ 展开群元 U_i：

$$U_i = a_0 \sigma_0 + \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (3.3)$$

且

$$a_0^2 + \mathbf{a}^2 = 1. \quad (3.4)$$

在淬火近似——确定随机格点的位置组态，仅仅变化格点上自旋组态——条件下，(3.1)的配分函数为：

$$Z_Q = \int \prod_i dU_i \exp \left\{ -(1/2)\beta \sum_{i,l_i} \text{Tr}_F [I - U_i^+ U_{i+l_i}] + \text{h.c.} \right\} \quad (3.5)$$

dU_i 为 SU(2) 群的不变测度，满足如下显式，

$$\begin{aligned} dU_i &= (1/4\pi^2) (1 - a_0^2)^{1/2} da_0 d\Omega \\ &= (1/4\pi^2) \sin^2 \phi d\phi \cdot d\cos\theta \cdot d\varphi. \end{aligned} \quad (3.6)$$

其中，φ: 0 ~ π, θ: 0 ~ π, φ: 0 ~ 2π 为引入的积分参数，相应地，配分函数为，

$$Z_Q = \int \prod_i \left\{ dU_i \exp \left\{ -1/2 \sum_{l_i} (1 - \cos \phi_i \cos \phi_{i+l_i} - \sin \phi_i \sin \phi_{i+l_i} \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_{i+l_i}) \right\} \right\}, \quad (3.7)$$

$$\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_{i+l_i} = \cos \phi_i \cos \phi_{i+l_i} + \sin \phi_i \sin \phi_{i+l_i} (\sin \theta_i \sin \theta_{i+l_i} + \cos \theta_i \cos \theta_{i+l_i}). \quad (3.8)$$

用通常的 Metropolis 方法，我们分别在三种随机格点上 (8 × 8, 9 × 9, 10 × 10)，对 (3.5) — (3.8) 所定义自旋系统进行了 M-C 模拟，得到平均链内能 E(β) 和比热

C_v(β) 与

E

C

统计误差

以上诸式

我们

9 × 9, 1

(spin) U,

一个 (—

随机数 F

U_i

其中 (i, 之值。

计算

迭代，去掉

和 C_v(β)

的随机组态

论了 E(β)

曲线重合

表 1

Lat

Lat

Lat

$C_V(\beta)$ 结果.

$$E(\beta) = 1/N_I \langle A_{R,L} \rangle = 1/N_I \cdot (M - M_0) \sum_{s=M_0+1}^M [A_{R,L}(\beta)]_s. \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} C_V(\beta) &= 1/N_I \beta^2 \langle (A_{R,L}(\beta) - \langle A_{R,L}(\beta) \rangle)^2 \rangle \\ &= \beta^2 / N_I \cdot (M - M_0) \left\{ \sum_{s=M_0+1}^M [A_{R,L}^2(\beta)]_s + 1/N_I (M - M_0) \right. \\ &\quad \left. \cdot \left[\sum_{s=M_0+1}^M [A_{R,L}(\beta)]_s \right]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

统计误差由下式给出:

$$\Delta E(\beta) = (M - M_0)^{1/2} \{ [\langle A_{R,L}(\beta) \rangle - Z(\beta)]^2 \}^{1/2}. \quad (3.11)$$

以上诸式中, N_I 为总链数, M_0 为初始迭代次数, M 为总迭代次数.

四、结果和讨论

我们首先利用随机数程序构造一系列随机格点阵 $\{x_1, x_2, \dots, x_{N_0}\}_{R,L}$, 体积为 $8 \times 8, 9 \times 9, 10 \times 10$ 三类. 然后找近邻链 $l_i (i = 1, \dots, N_0)$; 并在格点上置放 $SU(2)$ 群元 (spin) $U_i = (a_0, \alpha)$. 产生的方法类似于文献 [9] 所采用的方法: 利用随机数程序生成一个 $(-1, +1)$ 分布的随机数 R_1 , 以 $(1 - R_1^2)^{1/2}$ 分布决定其取舍几率; 然后产生新的随机数 $R_2 = (0, 1), R_3 = (0, 2\pi)$, 构造出如下的 $SU(2)$ 群元

$$U_i = \{ R_1, (1 - R_1^2)^{1/2} [(1 - R_2^2)^{1/2} \cos R_3 \cdot \mathbf{i} + (1 - R_2^2)^{1/2} \sin R_3 \cdot \mathbf{j} + R_2 \mathbf{k}] \} \quad (4.1)$$

其中 $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ 为 3 维正交矢. 最后根据上节中的 (3.9) 和 (3.10) 式计算 $E(\beta)$ 和 $C_V(\beta)$ 之值.

计算中, 采用了周期性边界条件 (相当于环面条件); 在每点 β 值上, 进行了 450—700 迭代, 去掉初始迭代 100 次使系统达到热平衡态; β 值间距取 $\Delta\beta = 0.05 - 0.2$, 在 $E(\beta)$ 和 $C_V(\beta)$ 的过渡区 (坡值段) 还进行了 $\Delta\beta = 0.04$ 的精细分析. 并分别从高温端 ($\beta \rightarrow 0$) 的随机组态 (4.1) 和低温端 ($\beta \rightarrow \infty$) 的有序组态 ($a_0 = 1, \alpha = 0$) 的两种初始态出发讨论了 $E(\beta)$ 的热滞性. 结果分别由图 2—图 4 所示. 两种初始组态下的 $E(\beta)$ 之温度曲线重合, 无热滞现象.

表 1 随机格点阵的格点 N_0 , 链 N_I 和原格 N_p 的计算值 (指标 C) 和理论值 (指标 T)

	N_0	N_I^c	N_I^T	N_p^c	N_p^T
Lattice-I	61	371	384	371	384
Lattice-II	81	463	486	463	486
Lattice-III	100	579	600	579	600

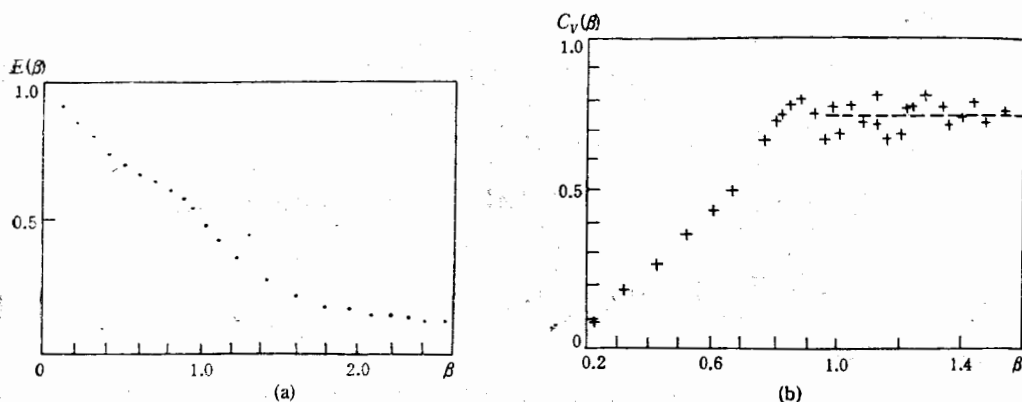


图 2 Lattice-I(8×8), 500—700 ITER., 内能 (a) 和比热 (b)

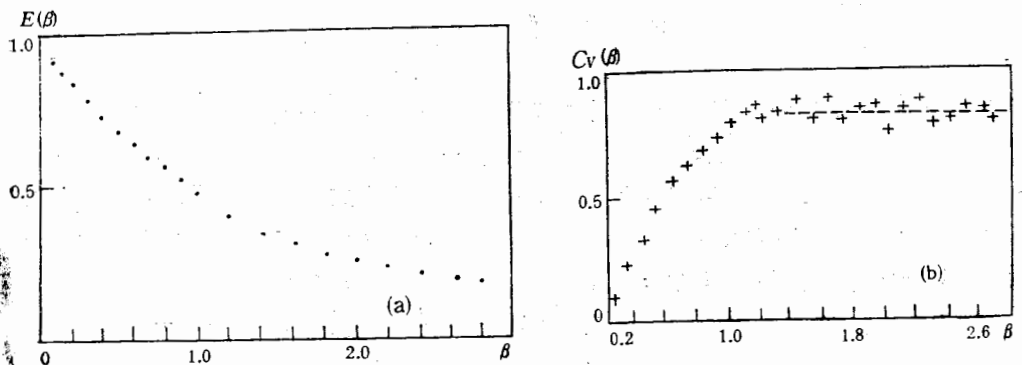


图 3 Lattice-II, 400—500ITER., 内能 (a) 和比热 (b)

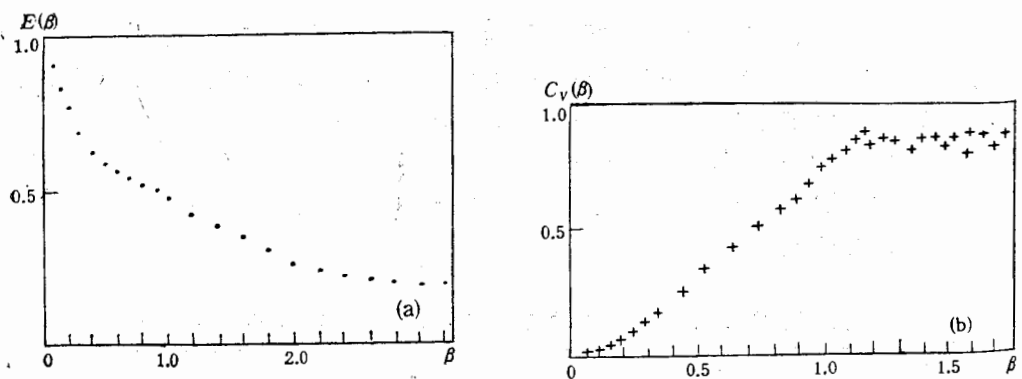


图 4 Lattice-III, 350—400ITER., 内能 (a) 和比热 (b)

对于三类格点阵 (Lattice-I: 8×8 , Lattice-II: 9×9 和 Lattice-III: 10×10) 计算结果的分析表明, 在 $\beta: 0 \sim 1.0$ 区域内, 三类格点的比热曲线光滑, 结果相一致, 统计涨落小, 因此看到格点阵的位置组态对系统影响较小, “淬火”假设是可行的 (可忽略其热力学效应)。当 $\beta: 1.0 \sim 1.2$ 时, 比热曲线出现一个平滑的坡状分布 (Shoulder), 出现随不同

格点类和
限体积效
统进入
区域, 由
的“淬火
均而达到
变而引起
生相变逆
我们
基本一致
希望这种

- [1] A. J.
- [2] A. J.
- [3] F. C.
- [4] A. J.
- [5] R. F.
- [6] H-C.
- [7] N. I.
- 337.
- [8] K. C.
- [9] M. C.

M
S

In th
by Monte
and specif
mension.
tinuous ph
SU(N) ga
teresting r

格点类和不同随机格点组态而变化的统计涨落和坡状分布随格点阵增大而缓慢右移的有限体积效应; 继而当 $\beta \geq 1.2$ 时, 统计涨落渐减, 边界效应平稳从而说明在这两个区域系统进入了过渡区, 并伴有明显的有限体积引起的边界效应. 从此结果我们认为: 在过渡区域, 由于统计涨落使得“淬火”假定不可靠, 须考虑格点(自旋)的位置组态. 以修正我们的“淬火”假定. 这一点可以通过对较多数量 (10^1 — 10^2 量级) 的随机格点阵的多次取样平均而达到 (理论上, 就是作关于(2.1)式的分布平均). 从能量曲线来考虑, 没有发现因相变而引起的热滞现象. 因此, 我们的结果表明: 在 $\beta \sim 1.0 \pm 0.1$, 系统进入过渡区, 无发生相变迹象. 并在过渡区内统计涨落大, 须进行有限体积修正.

我们的结果与文献[5,6]所进行的 4 维随机格点 $SU(2)$ 规范理论的 M-C 计算结果基本一致, 从而表明 2 维手征模型和 4 维规范理论在新的随机格点形式下的一致性. 并希望这种自旋系统有助于对非微扰规范理论的研究.

参 考 文 献

- [1] A. A. Migdal, *Zhete (USSR)*, **69**(1975), 810.
- [2] A. M. Polyakov, *Phys. Lett.*, **B59**(1975), 79.
- [3] F. Green & S. Samuel, *Nucl. Phys.*, **B190**(1981), 113.
- [4] A. M. Horowitz, *Nucl. Phys.*, **B251**(1985), 1
- [5] R. Friedberg & H-C. Ren, *Nucl. Phys.*, **B235**(1984), 310.
- [6] H-C. Ren, *Nucl. Phys.*, **B235**(1985), 321.
- [7] N. H. Christ, R. Friedberg & T. D. Lee, *Nucl. Phys.*, **B202**(1982), 89; **B210**(1982), 310; **B210**(1982), 337.
- [8] K. G. Wilson, *Phys. Rev.*, **D10**(1974), 2445.
- [9] M. Creutz, *Phys. Rev.*, **D21**(1980), 2308.

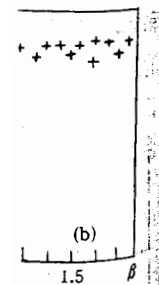
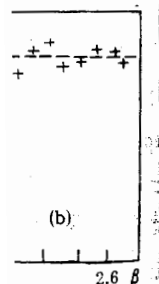
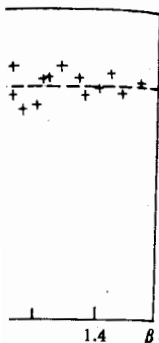
MONTE CARLO SIMULATION OF $SU(2) \times SU(2)$ SPIN SYSTEM ON 2-DIMENSIONAL RANDOM LATTICE

LI WEN-ZHU YING HE-PING DONG SHAO-JING

(Zhejiang University)

ABSTRACT

In this paper, a $SU(2) \times SU(2)$ chiral model on 2-dimensional random lattice is studied by Monte Carlo simulation with 8×8 , 9×9 and 10×10 lattice volumes. The results of its energy and specific heat per link are obtained and coincide with that of $SU(2)$ gauge system on 4-dimension. The systems enter crossover region at $\beta \geq 1.0$ but show no obvious evidences of continuous phase transition. Thus we believed that the correspondences between 4-dimensional $SU(N)$ gauge theory and 2-dimensional $SU(N) \times SU(N)$ spin system may be generalized to interesting random lattice.



10) 计算结果, 统计涨落略其热力学出现随不同