第11卷 第1期　高能物理与核物理　Vol. 11, No. 1
1987年1月　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　Jan., 1987

软 π Skyrme 模型和核子的静态性质

林进虎　郑哲洙

（延 边 大 学）

摘　　要

本文在 Skyrme 模型的基础上引进软 π 效应，推出了新的 N、Δ 质量分裂公式，计算结果表明，软 π 场的扰动，对核子等一些强子的基态能量是不可忽视的，得到的结果比文献[1]有较明显的改进.

一、引　　言

由 Skyrme[2] 引进的孤立子 $SU(2)\times SU(2)$ 手征理论可以解释为强子 QCD. 在 Skyrme 模型里，强子是非线性 σ 模型的孤立子，而作为孤立子的强子可以用集体坐标方法[1] 来描述，得到的结果在 30% 以内与实验相符. 用扩充的 $SU(3)\times SU(3)$ Skyrme 模型[3] 可以计算 $(\bar{d}u)_L(\bar{u}d)_L$ 的八重态矩阵元，其结果与夸克模型一致.

核子等一些强子的性质与 π 场的扰动有关 Howard J. Schmitzer[4] 通过构造软 πSkyrme 有效拉氏量来计算了强 CP 破坏软 π 核子耦合常数. Takeshi Otofuji 等人[5] 用手征微扰方法得到了合理的 π-核子相互作用拉氏量. 在这篇文章里，我们从文[5]给出的拉氏量出发，推出了 N、Δ 质量分裂公式，重新定出了理论参数 e 和 f_π. 电荷半径如 $\langle r^2\rangle_{M,I=0}$ 的定义上采用了李炳安和阎沐霖[6] 所给出的关系式:

$$\langle r^2\rangle_{M,I=1}=\frac{3}{5e^2f_\pi^2}\frac{\int_0^\infty \tilde{r}^4\sin^2F\left[1+4\left(F'^2+\frac{\sin^2F}{\tilde{r}^2}\right)\right]d\tilde{r}}{\int_0^\infty \tilde{r}^2\sin^2F\left[1+4\left(F'^2+\frac{\sin^2F}{\tilde{r}^2}\right)\right]d\tilde{r}}.$$

从而得到了比较满意的结果.

二、软 π Skyrme 哈密顿量和 N、Δ 质量分裂公式

Skyrme 模型中场的拉氏密度为

$$\mathscr{L}(U)=\frac{f_\pi^2}{16}\mathrm{Tr}[(\partial_\mu U)(\partial^\mu U^+)]+\frac{1}{32e^2}\mathrm{Tr}\{[(\partial_\mu U)U^+,(\partial_\nu U)U^+]^2\}$$
$$+\frac{1}{16}f_\pi^2m_\pi^2\,\mathrm{Tr}[U+U^+-2]. \tag{2.1}$$

本文1986年1月10日收到.

其中，U 是一个 $SU(2)$ 矩阵，f_π 是 π 衰变常数，e 为无量纲参数．对于转动着的孤立子来说，U 应该是[5]：

$$U = U_0(t) = A(t)U_0(x)A^{-1}(t). \tag{2.2}$$

在这里 $U_0(\boldsymbol{x}) = \exp[iF(r)\boldsymbol{\tau}\cdot\hat{\boldsymbol{x}}]$，$F(r)$ 满足的边界条件为：$F(0)=\pi$，$F(\infty)=0$，而 $A(t) = a_0(t) + i\boldsymbol{a}(t)\cdot\boldsymbol{\tau}$，$\sum_{i=0}^{3} a_i^2 = 1$，也即 $A(t)$ 为只与时间有关，与空间坐标无关的 $SU(2)$ 矩阵．

根据手征微扰方法[5]，令 $U = U_\pi U_0(t) U_\pi$（这里，$U_\pi = \exp(i\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\varphi}/f_\pi)$，$\boldsymbol{\varphi}$ 为 π 场），则(2.1)可改写为：

$$\mathscr{L}(U_\pi U_0(t) U_\pi) = \mathscr{L}_B + \mathscr{L}_M + \mathscr{L}_I, \tag{2.3}$$

其中，$\mathscr{L}_B$ 的表达式就是 (2.1)，但这时的 $U = U_0(t)$；$\mathscr{L}_B$ 表示重子部分，$\mathscr{L}_M$ 表示介子部分，它等价于传统的非线性 σ 模型，即

$$\mathscr{L}_M = \frac{f_\pi^2}{16}\mathrm{Tr}[(\partial_\mu U_{2\pi})(\partial^\mu U_{2\pi}^+)] + \frac{1}{8} f_\pi^2 m_\pi^2 \mathrm{Tr}(U_{2\pi} - 1), \tag{2.4}$$

在这里 $U_{2\pi} = U_\pi U_\pi$．

其次，$\mathscr{L}_I$ 包括软、硬 π 项．考虑到 $\boldsymbol{\varphi}(r)$ 是微扰，故 U_π 可展开成：

$$U_\pi = \exp(i\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\varphi}/f_\pi) \cong 1 + i\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\varphi}/f_\pi - \frac{1}{2}\boldsymbol{\varphi}^2/f_\pi.$$

因而在 $A(t)=1$ 的情况下，软 π 项可近似地写成：

$$\mathscr{L}_S = \frac{1}{f_\pi}(\partial_\mu\boldsymbol{\varphi})\cdot\boldsymbol{A}^\mu + \frac{1}{f_\pi^2}(\partial_\mu\boldsymbol{\varphi}\times\boldsymbol{\varphi})\cdot\boldsymbol{V}^\mu + \frac{1}{4}m_\pi^2\varphi^2\,\mathrm{Tr}(1-U_0)$$
$$+\frac{1}{4}m_\pi^2 f_\pi\,\mathrm{Tr}(i\boldsymbol{\tau}U_0)\cdot\boldsymbol{\varphi}, \tag{2.5}$$

其中 $\boldsymbol{V}_\mu$ 和 $\boldsymbol{A}_\mu$ 分别为矢量和轴矢量的 Noether 流．而硬 π 项为

$$\mathscr{L}_H = \frac{1}{2}(\partial^\mu\varphi_a)\hat{G}_{ab}(\partial_\mu\varphi_b) + \frac{1}{2}(\partial^\mu\varphi_a)\hat{H}_{ab,\mu\nu}(\partial^\nu\varphi_b). \tag{2.6}$$

当 A 为 t 的函数的时候（相当于孤立子转动情况），拉氏量可写成：

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_1 + \mathscr{L}_2, \tag{2.7}$$

其中 $\mathscr{L}_0 = -M + 2\lambda\sum_{i=0}^{3}\dot{a}_i^2$ 表示裸孤立子部分，λ 为转动惯量，M 为孤立子质量[1]；有关 π 场的部分可分成 $\mathscr{L}_1$ 和 $\mathscr{L}_2$，$\mathscr{L}_1$ 包含时间导数，即

$$\mathscr{L}_1 = \int d^3x\left\{\frac{1}{2}\dot{\varphi}_a K_{ab}\dot{\varphi}_b + \dot{\varphi}_a M_{ai}\dot{a}_i\right\}, \tag{2.8}$$

剩余部分为

$$\mathscr{L}_2 = -\frac{1}{2}\int d^3x\varphi_a(-\Delta + m_\pi^2\cos F)\varphi_a$$
$$+\frac{1}{f_\pi^2}\int d^3x(\nabla_i\boldsymbol{\varphi}\times\boldsymbol{\varphi})\cdot\boldsymbol{V}_i$$
$$-\frac{1}{2}\int d^3x\mathscr{R}_{\alpha a}\varphi_a\{-\nabla\cdot\hat{G}_{\alpha\beta}\nabla + \nabla_i(\hat{H}_{\alpha\beta,ij}\nabla_j)\}\mathscr{R}_{\beta b}\varphi_b. \tag{2.9}$$

在推导(2.8)的时候，孤立子被假定为缓慢转动的，因而忽略了 $\dot a$ 的平方项．对于交叉项，有

$$M_{ai}\dot{a}_i = f_\pi^{-1}A_0^a + f_\pi^{-2}\varepsilon_{abc}\varphi_b V_0^c + \text{硬}\,\pi\,\text{的项}, \tag{2.10}$$

而 K_{ab} 由下式给出：

$$K_{ab} = \mathscr{R}_{\alpha a}\mathscr{R}_{\beta b}(1+\hat{G})_{\alpha\beta}, \tag{2.11}$$

引进与场量 a_i 和 φ_a 相对应的共轭动量 $\pi_i = \dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{a}_i} = 4\lambda\dot{a}_i$，$p_a = \dfrac{\delta\mathscr{L}}{\delta\dot{\varphi}_a} = K_{ab}\dot{\varphi}_b$，得到的相互作用表示中的哈密顿为

$$\begin{aligned} H = M &+ \frac{1}{8\lambda}\sum_{i=0}^{3}\pi_i^2 + \sum_{i,j}\pi_i g_{ij}\pi_j + \frac{1}{2}\int p_a K_{ab}^{-1}p_b \\ &+ \frac{1}{8\lambda}\left(\int M_{ai}K_{ab}^{-1}p_b\right)^2 - \frac{1}{4\lambda}\int p_a K_{ab}^{-1}M_{bi}\pi_i - \mathscr{L}_2, \end{aligned} \tag{2.12}$$

在这里，

$$g_{ij} = \frac{1}{32\lambda^2}\int M_{a_i}K_{ab}^{-1}M_{bj}. \tag{2.13}$$

在 M_{a_i} 的最低阶近似下，π 场对孤立子转动能的修正值为[5]

$$\sum_{i,j}\pi_i g_{ij}\pi_j = \frac{1}{2\lambda}\hat{\boldsymbol{J}}^2. \tag{2.14}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{J}}$ 为孤立子的 Spin orperater[1]．从(2.14)式可以看出，由于 π 场的影响，在 M_{a_i} 的最低阶近似下，孤立子的转动能增加了一倍． 这样，考虑到软 π 效应，N 和 Δ 的质量公式应相应地修正为

$$\begin{aligned} M_N &= \widetilde{M} + \frac{1}{2\lambda}\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{2\lambda}\left(\frac{3}{4}\right) = \widetilde{M} + \frac{3}{4\lambda}, \\ M_\Delta &= \widetilde{M} + \frac{1}{2\lambda}\left(\frac{15}{4}\right) + \frac{1}{2\lambda}\left(\frac{15}{4}\right) = \widetilde{M} + \frac{15}{4\lambda}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

这是因为 N 和 Δ 的质量差主要是由其转动能不同而造成的缘故．(2.15)式中的 $\widetilde{M}$，λ 分别由下式给出：

当 $m_\pi = 0$ 的时候，

$$\widetilde{M} = M + \Delta M, \tag{2.16}$$

$$M = 4\pi\int_0^\infty r^2\left\{\frac{f_\pi^2}{8}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2 + \frac{2\sin^2 F}{r^2}\right] + \frac{\sin^2 F}{2e^2r^2}\left[\frac{\sin^2 F}{r^2} + 2\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2\right]\right\}dr, \tag{2.17}$$

$$\Delta M = \frac{1}{2}\int p_a K_{ab}^{-1}p_b + \frac{1}{8\lambda}\left(\int M_{a_i}K_{ab}^{-1}p_b\right)^2 - \frac{1}{4\lambda}\int p_a K_{ab}^{-1}M_{b_i}\pi_i - \mathscr{L}_2, \tag{2.18}$$

$$\lambda = \frac{2}{3}\pi(1/e^3f_\pi)\Lambda = \frac{2\pi}{3e^3f_\pi}\int\tilde{r}^2\sin^2 F\left[1 + 4\left(F^2 + \frac{\sin^2 F}{\tilde{r}^2}\right)\right]d\tilde{r}. \tag{2.19}$$

当 $m_\pi \neq 0$ 的时候，$\widetilde{M} = M + \Delta M$ 中 ΔM 不变，而 M 和 λ 的表达式分别为

$$\begin{aligned} M = \int d^3x &\left\{\frac{f_\pi^2}{8}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2 + \frac{2\sin^2 F}{r^2}\right] + \frac{\sin^2 F}{2e^2r^2}\left[2\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2 + \frac{\sin^2 F}{r^2}\right]\right. \\ &\left. + \frac{1}{4}m_\pi^2 f_\pi^2(1-\cos F)\right\}, \end{aligned} \tag{2.20}$$

$$\lambda=\frac{1}{6}\int d^3x\sin^2F\left\{f_\pi^2+\frac{4}{e^2}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2+\frac{\sin^2F}{r^2}\right]\right\}. \tag{2.21}$$

原则上，从(2.15)—(2.21)可以严格定出参数 e 和 f_π. 不过，在这里我们作了如下的近似：

考虑到 φ 是微扰，由 φ 引起的附加于孤立子质量 $\widetilde{M}$ 的 ΔM 忽略不计.

在上述近似下，我们得到：

当 $m_\pi=0$ 的时候，$e=4.58$，$f_\pi=108.56$；当 $m_\pi\neq 0$ 的时候，$e=4.05$，$f_\pi=92\text{MeV}$，而基态波函数仍取文献[1]的形式，即

$$|p\uparrow\rangle=\frac{1}{\pi}(a_1+ia_2),\quad |p\downarrow\rangle=-\frac{i}{\pi}(a_0-ia_3),$$

$$|n\uparrow\rangle=\frac{i}{\pi}(a_0+ia_3),\quad |n\downarrow\rangle=-\frac{1}{\pi}(a_1-ia_2),$$

$$\left|\Delta^{++},S_z=\frac{3}{2}\right\rangle=\frac{\sqrt{2}}{\pi}(a_1+ia_2)^3,$$

$$\left|\Delta^{+},S_z=\frac{1}{2}\right\rangle=-\frac{\sqrt{2}}{\pi}(a_1+ia_2)(1-3(a_0^2+a_3^2)). \tag{2.22}$$

三、电荷半径及其他物理量

在这里，同位旋标量和同位旋矢量的电半径平方的平均值定义为[1]

$$\langle r^2\rangle_{I=0}=\int_0^\infty r^2\rho_B(r)dr=-\frac{2}{\pi e^2f_\pi^2}\int_0^\infty\sin^2F\,F'\tilde{r}^2d\tilde{r}, \tag{3.1}$$

$$\langle r^2\rangle_{I=1}=\frac{\int_0^\infty\tilde{r}^4\sin^2F\left[1+4\left(F'^2+\frac{\sin^2F}{\tilde{r}^2}\right)\right]d\tilde{r}}{e^2f_\pi^2\int_0^\infty\tilde{r}^2\sin^2F\left[1+4\left(F'^2+\frac{\sin^2F}{\tilde{r}^2}\right)\right]d\tilde{r}}, \tag{3.2}$$

而磁半径平方的平均值定义为[6]

$$\langle r^2\rangle_{M,I=0}=\frac{3}{5e^2f_\pi^2}\cdot\frac{\int_0^\infty\tilde{r}^4\sin^2F\,F'd\tilde{r}}{\int_0^\infty\tilde{r}^2\sin^2F\left[1+4\left(F'^2+\frac{\sin^2F}{\tilde{r}^2}\right)\right]d\tilde{r}}, \tag{3.3}$$

$$\langle r^2\rangle_{M,I=1}=\frac{3}{5}\cdot\frac{\int_0^\infty\tilde{r}^4\sin^2F\left[1+4\left(F'^2+\frac{\sin^2F}{\tilde{r}^2}\right)\right]d\tilde{r}}{e^2f_\pi^2\int_0^\infty\tilde{r}^2\sin^2F\left[1+4\left(F'^2+\frac{\sin^2F}{\tilde{r}^2}\right)\right]d\tilde{r}}. \tag{3.4}$$

磁矩

$$\mu_p=\frac{1}{4}(g_{I=0}+g_{I=1}),\quad \mu_n=\frac{1}{4}(g_{I=0}-g_{I=1}). \tag{3.5}$$

其中，$g_{I=0}=\frac{4}{9}\langle r^2\rangle_{I=0}M_N(M_\Delta-M_N)$ 和文献[1]相同，而 $g_{I=1}=\frac{4M_N}{M_\Delta-M_N}$ 和文献[1]

不同,两者相差一倍,这主要是由于孤立子转动能增加一倍而引起的.(见附录)轴矢耦合常数等其他物理量均按文献[1]的定义计算.其结果列表如下:

表 1

	文[1] $e=5.45$ $f_\pi=129\mathrm{MeV}$	文[1] $e=4.84$ $f_\pi=108\mathrm{MeV}$	本文 $e=4.58$ $f_\pi=108.56\mathrm{MeV}$	本文 $e=4.05$ $f_\pi=92\mathrm{MeV}$	实验值
$\langle r^2\rangle^{1/2}_{I=0}$	0.59fm	0.68fm	0.71fm	0.81fm	0.72fm
$\langle r^2\rangle^{1/2}_{I=1}$	∞	1.04fm	∞	1.05fm	1.05fm
$\langle r^2\rangle^{1/2}_{M,I=0}$	0.92fm	0.95fm	0.81fm	0.84fm	0.81fm
$\langle r^2\rangle^{1/2}_{M,I=1}$	∞	1.04fm	∞	0.89fm	0.80fm
μ_p	1.87	1.97	3.59	3.7	2.79
μ_n	−1.31	−1.24	−2.8	−2.67	−1.91
g_A	0.61	0.65	0.86	0.93	1.23
$g_{\pi NN}$	8.9	11.9	14.88	18.9	13.5
$g_{\pi N\Delta}$	13.2	17.8	22.32	28.35	20.3
$\mu_{N\Delta}$	2.3	2.3	4.47	4.46	3.3
σ		49MeV		37.1MeV	36±20MeV
M_N(MeV)	938.9 (输入)	938.9 (输入)	939 (输入)	939 (输入)	938.9
M_Δ(MeV)	1232 (输入)	1232 (输入)	1232 (输入)	1232 (输入)	1232
m_π(MeV)	0	138 (输入)	0	138 (输入)	138

四、小结和讨论

从表 1 可以看出,软 π 场对核子等一些强子的静态性质有不可忽视的影响. 如对 N 和 Δ 来说,转动能刚好增加了一倍,由此导致公式(2.15),给出了不同的参数 e 和 f_π. 在定出理论参数的时候,令 $\Delta M\approx 0$,我们作这种近似不会给定参数以大的影响(以致不会给物理量的计算大的影响).其理由是:孤立子裸质量的主要部分与 f_π/e 成正比,而转动能部分则与 e^3f_π 成正比,加上(在不同模型中)参数 f_π 和 e 不是同时增加就是同时减少(因而 f_π/e 几乎不变),因此转动能部分对参数的变化远比裸质量部分敏感.事实上,φ 场是微扰,因而可以估计到,φ 对孤立子裸质量的修正也一定是微小的量.

在磁半径的定义上,我们采用文献[6]的方式.其实,比较文献[1]和[6],只差因子 3/5,不过文献[6]给出更加合理的理论值.

如果象文献[6]那样,在拉氏量中引进 d 波的贡献,那么也许得到比本文更好的结果。一个可能的估计是

$$A=\int_0^\infty \tilde r^2\sin^2F\left\{1+4\left(F'^2+\frac{2\sin^2F}{\tilde r^2}\right)-8r\left(F'^2+\frac{2\sin^2F}{\tilde r^2}\right)^2\right\}d\tilde r$$

值变小，因而 $g_{I=1}=\dfrac{8M_N\pi\Lambda}{9f_\pi e^3}$ 变小，结果，磁矩 μ_P 和 μ_M 的值更接近于实验值.

至于 Goldberger-Treiman 关系式 $g_A=\dfrac{f_\pi g_{\pi NN}}{2m_N}$，在本文里仍可得到满足.

值得进一步讨论的是 Soliton 振动和转动的耦合产生的附加能量的影响. 从文献 [7] 的结果看，这种影响是相当大的，关于这方面的讨论将在另文中给出.

附　录

$g_I=\dfrac{4M_N}{M_\Delta-M_N}$ 的推导

由 $M_N=M+\dfrac{3}{4\lambda}$ 和 $M_\Delta=M+\dfrac{15}{4\lambda}$ 得

$$\lambda=\frac{3}{M_\Delta-M_N}. \tag{1}$$

其次，

$$\lambda=\frac{4}{6}\pi\Lambda(1/e^3f_\pi), \tag{2}$$

$$\Lambda=\int_0^\infty \tilde r^2\sin^2 F\left[1+4\left(F'^2+\frac{\sin^2 F}{\tilde r^2}\right)\right]d\tilde r. \tag{3}$$

另一方面，从 $\boldsymbol{\mu}=(g/4M)\boldsymbol{\sigma}$ 和 $(\boldsymbol{\mu}_{I=1})_3=\dfrac{2}{9}\pi\dfrac{\Lambda}{f_\pi e^3}$ 得[1]

$$g_{I=1}=8M_N\pi\Lambda/9f_\pi e^3. \tag{4}$$

从(1)～(4)可得

$$g_{I=1}=4M_N/(M_\Delta-M_N).$$

参　考　文　献

[1] Gregory S. Adkins, Chiara R. Nappi and Edward Witten, *Nucl. Phys.*, **B228**(1983), 552; Gregory S. Adkins and Chiara R. Nappi, *Nucl. Phys.*, **B233** (1984), 109.

[2] T. H. R. Skyrme, *Proc. Roy. Soc.*, **A260**(1961), 127.

[3] Michal Praszalowicz and Josip Trampetic, CERN Preprint TH. 4171, (1985).

[4] Howard J. Schnitzer, *Phys. Lett.*, **139B** (1984), 217.

[5] Takeshi Otofuji, Sakae Saito and Masaru Yasuno, *Prog. Theor, Phys.*, Vol. **73**(1985), 520.

[6] B. A. Li and M. L. Yan, PrePrint (1985); B. A. Li, *Z. Phys.*, C(1985).

[7] L. C. Biedenhan, Y. Dothan and M. Tarlini, *Phys. Rev.*, **D31** (1985), 649.

THE SOFT-PION SKYRME MODEL AND STATIC PROPERTIES OF NUCLEONS

Lin Jin-hu　　Zheng Zhe-zhu

(*Yenbian University*)

Abstract

We derived a new formula for the mass plitting of N and Δ on the basis of the Skyrme model with the consideration of the soft pion effect. The results showed that the soft-pion fluctuation cannot be ignored in the evaluation of the ground state energy of some hadron like nuleon etc. The results obtained are better than that of Adkins et al. (1984).