第10卷 第4期　　高能物理与核物理　　Vol. 10, No. 4
1986年7月　　PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS　　July, 1986

# $SU(4)\times SU(4)$ 禁闭弱作用复合模型

万陵德　张新民　鲁公儒　薛晓舟
（新乡师院物理系）

**摘　要**

本文对超色群为半单群的亚夸克模型结构作了讨论，具体构造了一个 $SU(4)\times SU(4)$ 禁闭弱作用复合模型，模型中给出了三代轻质量的复合粒子.

## 一、引　言

近年来亚夸克模型成为理论物理学界关注的课题之一. 虽然实验上没有表明夸克和轻子具有结构，但它们之间的对称性引导人们设想更基本的亚夸克层次的存在. 一般认为亚夸克之间的超色作用力是比色力更强的规范相互作用，它亦应满足渐近自由的要求. 在标度 $\Lambda_{HC}$（几百～几千 GeV）超色力将亚夸克束缚成夸克和轻子. 由于夸克与轻子的质量 $m\ll\Lambda_{HC}$，所以这种束缚的动力学机制是个难题. 为了说明这种机制，'tHooft 提出了相容性条件[1]. 在构造亚夸克模型时一般都应用这两个条件（或其中之一，即反常条件）来构造"轻"的束缚态.

Abbott 和 Farhi 提出了 $SU(2)$ 禁闭弱作用模型[2]. 他们提出弱作用力是超色作用的剩余力. 这样，弱作用就不是一种基本的相互作用，而传递弱作用的规范粒子 $W^{\pm}$，$Z^0$ 则是复合粒子. 近年来有些文章讨论了禁闭弱作用亚夸克模型[3]. Abbott 等人的文章虽有很大的吸引力，但也存在几点不足:

1. 包含基本标量场. 从大统一角度讨论，要得到轻质量的标量粒子，在不引入超对称时存在一定的困难.

2. 仅左手态夸克和轻子有结构，而右手态夸克和轻子则不是复合粒子，这使理论显得很不自然. 很难设想同一粒子的两个手征态之间存在如此巨大的差别.

3. 从大统一角度看，让 $SU(2)$ 比色力 $SU(3)_c$ 强需要复杂的破缺步骤.

4. 究竟有几代夸克和轻子，不能给出预言.

最近，人们开始讨论用半单群作为超色群来构造亚夸克模型[4]. B. Schrempp 和 F. Schrempp 构造了一个 $G_{HC}=SU(2)_L\times SU(2)_R$ 的禁闭弱作用模型[5]. 他们引入的基本 Preons 全是费米型的，不包含基本标量场. 应用 'tHooft 反常条件，得到了一代束缚态，这里左手态与右手态粒子都是复合粒子.

---

本文1985年3月16日收到.

虽然他们的模型克服了 Abbott 等人模型中的一些困难，但没有解决“代”的问题。他们仅得到了一代夸克与轻子的束缚态，不能统一说明实验上已发现的三代夸克与轻子，这是不能令人满意的。

我们讨论了以半单群为超色群的亚夸克模型的基本结构。我们发现，用 $SU(4)\times SU(4)$ 作为超色群，表示取为 4(日，·)＋4(·，日)＋(日，日)，是对 B. Schrempp 等人工作的唯一推广。我们构造了一个 $G_{HC}=SU(4)\times SU(4)$ 的禁闭弱作用模型，满足 'tHooft 反常条件的要求，我们得到了一组整数解，它使我们可以构造三代轻的复合夸克和轻子，这样对“代”的问题给出了说明。

## 二、超色群为半单群的亚夸克模型的基本结构一般讨论

设描述超色相互作用的定域规范群是：

$$G_{HC}=SU(N)\times SU(N)$$

其超味群可以分为两类：一类是：$G_F\supset SU(3)_c\times SU(2)_W\times U(1)_Y$ 这类模型中，色胶子，弱中间矢量玻色子和光子都是没有结构的，夸克与轻子是复合粒子。另一类是：$G_F\supset SU(3)_c\times U(1)_{em}$。这类模型中，色胶子和光子是基本的，而 $W^{\pm}$，$Z^0$，夸克及轻子都是有结构的复合粒子。本文讨论这后一类模型。

由于 $G_{HC}=SU(N)\times SU(N)$ 一般可能有二个耦合常数 $g_1$ 和 $g_2$。但从对称性考虑，它们应该有相等的耦合，即 $g_1=g_2=g$。类比于 QCD，我们假定超色力亦具有渐近自由性质。为此，$G_{HC}$ 的表示应满足超色渐近自由条件，为使理论可重整，同时要满足三角反常相消的条件。下面我们讨论两种情况：

1. 亚夸克填入 $G_{HC}=SU(N)\times SU(N)$ 的基础表示。设存在三种亚夸克 V，W，T，在 $G_{HC}$ 下的变换性质为：

$$\text{V}:\ M(\underline{N},1);\qquad \text{W}:\ M'(1,\underline{N});$$
$$\text{T}:\ P(\bar{N},\ \bar{N}).$$

其中 $M$，$M'$ 和 $P$ 分别是亚夸克 V、W、T的多重数。由亚夸克组成的复合费米子为：VWT。由 $G_{HC}$ 中两个 $SU(N)$ 群的对称性，要求 $M=M'$。这样，三角反常相消条件为：

$$PN=M$$

$G_{HC}$ 的渐近自由条件为

$$\beta=\frac{11}{3}C_2(SU(N))-\frac{2}{3}\Sigma T(F)>0$$

即

$$11N-M-PN>0.$$

这样要求 $P\leqslant 5\quad M\leqslant 5N$.

对于上述表示，理论的全部对称性为：

$$G_{HC}\times SU(M)\times SU'(M)\times SU(P)\times U(1)\times\mathscr{L}$$

$\mathscr{L}$ 是正洛仑兹群.

例如,取 $N=4$, $P=1$, $M=4$. 则 V, W, T 在 $G_{HC}$ 下的表示及多重数为:

$$\mathrm{V}:\ 4(\underline{4},\ \underline{1}),\qquad \mathrm{W}:\ 4(\underline{1},\ \underline{4});$$
$$\mathrm{T}:\ (\bar{4},\ \bar{4}).$$

其整体对称性为:

$$SU(4)\times SU'(4)\times U(1).$$

经过玻色凝聚:

$$\langle \mathrm{TT}\rangle,\ \langle(\mathrm{TV})\overline{(\mathrm{TV})}\rangle,\ \langle(\mathrm{TW})\overline{(\mathrm{TW})}\rangle,$$

可将味对称性部分破缺为:

$$SU(3)\times SU'(3)\times U(1)\times U'(1),$$

根据反常条件则可给出复合粒子的代结构.

2. 设 $N=2m$, $G_{HC}=SU(2m)\times SU(2m)$.

三种亚夸克 $V$, $W$, $T$ 在 $G_{HC}$ 下的变换性质取为:

$$\mathrm{V}: M([m],\ [0]);\quad \mathrm{W}([0],\ [m]);$$
$$\mathrm{T}: P([m],\ [m]).$$

标号 $[m]$ 代表 $m$ 秩全反称表示.

容易看出,在这样的表示下, $G_{HC}$ 群下的三角反常相消条件自然得到满足. 当我们把 $P$ 取为 1 时, $G_{HC}$ 群下的渐近自由条件表为:

$$22m-\frac{(2m-2)!}{[(m-1)!]^2}\cdot\left[M+\frac{(2m)!}{(m!)^2}\right]>0.$$

例如,当 $m=1$ 时, $G_{HC}=SU(2)\times SU(2)$, $M\leqslant 20$;

当 $m=2$ 时, $G_{HC}=SU(4)\times SU(4)$, 则 $M\leqslant 16$;

当 $m=3$ 时,则 $M$ 无自然数解.

由此可见, $G_{HC}=SU(4)\times SU(4)$ 是文献[5]的唯一的推广.

下面我们将讨论一个具体模型,其超色群为 $SU(4)\times SU(4)$, 亚夸克在群 $G_{HC}$ 下的表示及多重数取为:

$$4(日,\cdot)+4(\cdot,日)+(日,日).$$

## 三、$SU(4)\times SU(4)$ 模型

### 1. 复合的轻费米子

所有的亚夸克在 $SU(4)\times SU(4)$ 下的变换性质为:

$$F=(\underline{6},\ \underline{1}),\quad F'=(\underline{1},\ \underline{6}),$$
$$T=(\underline{6},\ \underline{6}).$$

上述表示是反常相消的,且满足 $SU(4)\times SU(4)$ 的渐近自由性质.

为了克服实表示的困难,使亚夸克不获得质量,我们可以通过引入分立对称性的方法来解决[6].

我们选择 $F$ 及 $F'$ 的多重数为 4, $T$ 的多重数为 1.

整体超味对称群为:

$$G_F = SU(4) \times SU'(4) \times U(1)_F \times U(1)_{F'} \times U(1)_T.$$

由于瞬子效应，使 $U(1)_F \times U(1)_{F'} \times U(1)_T \to U(1)$. 所以，理论的全部对称性为：

$$[SU(4) \times SU(4)]_{\text{gauge}} \times [SU(4) \times SU'(4) \times U(1)]_{\text{globle}}$$

上述三种亚夸克在这个群下的表示为：

$$F = (6,\ 1/4,\ 1)_{-1}$$
$$F' = (1,\ 6/1,\ \bar{4})_{-1}$$
$$T = (6,\ 6/1,\ 1)_{2/3}$$

假设下列玻色凝聚获得不为零的真空期望值：

$$\langle \mathrm{Re}(TT)\rangle \neq 0,$$

**表 1　'tHooft 指标如下：**

| Index | 复合态 | $SU(3) \times SU'(3) \times U(1) \times U'(1)$ | | | | 对应的夸克和轻子（对正指标） |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $I_1$ | $TLL'$ | 1 | 1 | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\nu_L$, $\nu_R^C$ |
| $I_2$ | $TLQ'$ | 1 | $\bar{3}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{6}$ | $u_R^C$ |
| $I_3$ | $TL'Q$ | 3 | 1 | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $u_L$ |
| $I_4$ | $TQQ'$ | 3 | $\bar{3}$ | $\frac{1}{6}$ | $-\frac{1}{6}$ | contains $\nu_L$ $\nu_R^C$ |
| $k_1$ | $T(LL')^+$ | 1 | 1 | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $\nu_L$ $\nu_R^C$ |
| $k_2$ | $T(LQ')^+$ | 1 | 3 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{6}$ | $u_L$ |
| $k_3$ | $T(L'Q)^+$ | $\bar{3}$ | 1 | $-\frac{1}{6}$ | $-\frac{1}{2}$ | $u_R^C$ |
| $k_4$ | $T(QQ')^+$ | $\bar{3}$ | 3 | $-\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | contains $\nu_L$ $\nu_R^C$ |
| $m_1$ | $(TL')^+L$ | 1 | 1 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $e_L$ |
| $m_2$ | $(TQ')^+L$ | 1 | 3 | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{6}$ | $d_L$ |
| $m_3$ | $(TL')^+Q$ | 3 | 1 | $\frac{1}{6}$ | $-\frac{1}{2}$ | $d_L$ |
| $m_4$ | $(TQ')^+Q$ | 3 | 3 | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | contains $d_R^C$ |
| $n_1$ | $(TL)^+L'$ | 1 | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $e_R^C$ |
| $n_2$ | $(TL)^+Q'$ | 1 | $\bar{3}$ | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{6}$ | $d_R^C$ |
| $n_3$ | $(TQ)^+L'$ | $\bar{3}$ | 1 | $-\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $d_R^C$ |
| $n_4$ | $(TQ)^+Q'$ | $\bar{3}$ | $\bar{3}$ | $-\frac{1}{6}$ | $-\frac{1}{6}$ | contains $d_L$ |

$$\langle (TF)(\overline{TF}) \rangle \neq 0$$
$$\langle (TF')(\overline{TF'}) \rangle \neq 0$$

则超味群 $G_F \to G'_F \equiv SU(3) \times SU'(3) \times U(1) \times U'(1)$ 其中 $SU(3) \times SU'(3)$ 是手征色，$U(1) \times U'(1)$ 是手征荷。

在 $G_{HC} \times G'_F = [SU(4) \times SU(4)]_{\text{gauge}} \times [SU(3) \times SU'(3) \times U(1) \times U'(1)]$下，所有亚夸克表示为：

$$T = (6,\ 6/1,\ 1)_{0,0},$$
$$L = (6,\ 1/1,\ 1)_{-\frac{1}{2},0};\quad L' = (1,\ 6/1,\ 1)_{0,\frac{1}{2}};$$
$$Q = (6,\ 1/3,\ 1)_{\frac{1}{6},0},\quad Q' = (1,\ 6/1,\ 3)_{0,-\frac{1}{6}}$$

定义

$$L_i = I_i - K_i$$
$$M_i = m_i - n_i \quad i = 1,2,3,4.$$

则 'tHooft 反常条件为：

$$L_1 - M_1 = L_2 - M_2,\ L_3 - M_3 = L_4 - M_4,$$
$$L_1 + M_1 = L_3 + M_3,\ L_2 + M_2 = L_4 + M_4,$$
$$L_1 + M_1 + 3(L_2 + M_2) = 6,\ L_1 - M_1 + 3(L_3 - M_3) = 6,$$

由此可得到一组整数解：

$$L_1 = 6,\quad M_1 = 0,\quad L_2 = 3,\quad M_2 = -3,$$
$$L_3 = 3,\quad M_3 = 3,\quad L_4 = 0,\quad M_4 = 0.$$

选取 'tHooft 指标的值为：

$$I_1 = 6,\quad K_1 = 0,\quad m_1 = 3,\quad n_1 = 3;$$
$$I_2 = 3,\quad K_2 = 0,\quad m_2 = 0,\quad n_2 = 3,$$
$$I_3 = 3,\quad K_3 = 0,\quad m_3 = 3,\quad n_3 = 0,$$
$$I_4 = K_4 = m_4 = n_4 = 0.$$

这一组解使我们得到了三代左右对称轻质量的夸克和轻子，而且没有其它 exotic 量子数存在。

**2. 弱作用的普适性**

对于上面的复合粒子谱，它表现出比 $SU(3) \times SU'(3) \times U(1) \times U'(1)$ 更高的整体对称性，即

$$[SU(4) \times SU'(4) \times SU(2) \times SU'(2) \times U(3)]_{\text{global}}$$

这一点不难看出：

$$\begin{pmatrix} \nu & u_1 & u_2 & u_3 \\ e & d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix}_L = \begin{pmatrix} TL' \\ (TL')^+ \end{pmatrix} (L,\ Q_1,\ Q_2,\ Q_3),$$

$$\begin{pmatrix} \nu & u_1 & u_2 & u_3 \\ e & d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix}_R^C = \begin{pmatrix} TL \\ (TL)^+ \end{pmatrix} (L',\ Q'_1,\ Q'_2,\ Q'_3),$$

$\begin{pmatrix} TL' \\ (TL')^+ \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} TL \\ (TL)^+ \end{pmatrix}$ 分别构成 $SU(2)$ 与 $SU'(2)$

的基础表示.

$(L, Q_1, Q_2, Q_3)$ 与 $(L', Q_1', Q_2', Q_3')$ 分别构成 $SU(4)$ 或 $SU'(4)$ 的基础表示.

由 'tHooft 指标决定的代对称性给出了整体的 $SU(3)$ 对称性.

在低能时，$[SU(2)\times SU'(2)]_{\text{global}}$ 等效于左右对称模型，而 $[SU(4)\times SU'(4)\times SU(3)]_{\text{global}}$ 则保证了弱作用的普适性.

**3. 复合的 $W_L^{\pm}$, $W_L^3$ 和 $W_R^{\pm}$, $W_R^3$**

$(TL')$ 构成 $[SU(4)\times SU(4)]_{\text{local}}$ 的实表示$(6,1)$，带电荷 $-\frac{1}{2}$（以 $e$ 为单位）. 引入复合场

$$\Phi=(TL')^c$$

$\Phi$ 场在 $G_{HC}=SU(4)\times SU(4)$ 下的表示为$(6,1)$，而带电荷为 $\frac{1}{2}$.

因为$\Phi$是二阶反称张量，记作 $\Phi_{ab}$，因为 $\tilde{\Phi}_{ab}=\varepsilon_{abcd}\phi^{*cd}$ 的变换性质与 $\Phi_{ab}$ 的变换性质相同，引入一个 $6\times 2$ 矩阵：

$$\Omega=[\Phi_{ab},\ (-)^{\delta_{c1}+\delta_{d1}}\varepsilon_{abcd}\Phi^{*cd}]$$

由$\Phi$与$\Phi^*$组成的独立超色单态的复合玻色子有

$$H=\frac{1}{2}\operatorname{Tr}(\Omega^+\Omega)$$

$$W^i_\mu=\frac{1}{2}\operatorname{Tr}(\tau^i\Omega^+D_\mu\Omega)$$

其中 $\tau^i(i=1,2,3)$ 是 $SU(2)_W$ 的生成元，$D_u$ 是 $SU(4)$ 的协变导数. 容易看出. $SU(2)_W$ 单态的矢量介子：

$$W^0_{\mu L}=\frac{1}{2}\operatorname{Tr}(\Omega^+D_\mu\Omega)=\frac{1}{2}\partial_\mu H$$

不是独立场，这是$\Phi$为 $SU(4)$ 的实表示的结果[3]. 同样可以讨论 $W_R^{\pm}$, $W_R^3$ 的复合.

## 四、简短的讨论

我们给出了一种禁闭弱作用的 $SU(4)\times SU(4)$ 复合模型. 在模型中，$e_L$ 和 $e_R^C$ 构成实表示，虽可通过引入分立对称性保证它们在 $\Lambda_{HC}$ 量级上无质量，但总不是一种十分满意的方案，这有待进一步讨论.

我们的模型是对文献[5]中 $G_{HC}=SU(2)\times SU(2)$ 模型的一种可能的推广. 与文献[5]不同之处在于：

1. 我们讨论了用半单群构造亚夸克模型的一般结构，我们发现用 $SU(4)\times SU(4)$ 作为 $G_{HC}$，表示取为 $4(\boxminus,\cdot)+4(\cdot,\boxminus)+(\boxminus,\boxminus)$ 是唯一的推广.

2. 我们优于文献[5]的是，由 'tHooft 反常条件方程得到了一组整数解，它使我们可以

构造三代轻的复合夸克和轻子．这样对代的问题给出了一个说明．

作者感谢高能所杜东生老师的有益讨论．

## 参 考 文 献

[1] G.'tHooft, Recent Development in Gauge Theories, by G.'tHooft, etc, (New York, 1980).
[2] L. F. Abbott and E. Farhi, *Phys. Lett.*, **B101** (1981), 69; *Nucl. Phys.*, **B189**(1981), 547.
[3] Yu-ping Kuang and S- H. H. Tye, *Phys. Rev.*, **D26**(1982), 1718.
[4] C. H. Albright, preprint Fermilab -PUB- 83/16- THY (1983), Composite model with confining $SU(N)\times SU(2)_L \times SU(2)_R$ hyper color.
[5] B. Schrempp and F. Schrempp, *Nucl. Phys.*, **B231** (1984), 109.
[6] 章义朋，周咸建，薛丕友，中国科学，(A) **1**(1983), 48.

# A CONFINING $SU(4)\times SU(4)$ COMPOSITE MODEL OF THE WEAK INTERACTIONS

WAN LING-DE ZHANG XIN-MIN LU GONG-RU XUE XIAO-ZHOU
*(Xinxiang Normal College)*

### ABSTRACT

A composite model with hypercolor group being semi-simple gauge group is discussed. A $SU(4)\times SU(4)$ composite model with confining weak interactions is proposed, which gives three families of light fermions.