第 10 卷 第 3 期　　高能物理与核物理　　Vol. 10, No. 3
1986 年 5 月　　PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS　　May, 1986

一种新的上边缘算子及其应用

周光召　吴岳良　谢彦波
（中国科学院理论物理研究所）

摘　　要

本文给出了以乘积形式定义的上边缘算子．在非阿贝尔规范场存在的情况下，利用这种算子对空间平移群的结合律进行了讨论．另外还讨论了 $SU(2)$ 和 $SO(3)$ 规范理论中的磁单极的量子化条件．

一、引　　言

最近人们已经把拓扑这门数学分支应用到规范场论中[1,2,3]．例如从陈形式和规范变换得到的一阶上闭链和二阶上闭链就可以导出流反常和算符对易子的反常[1,2]．另外在量子力学中，我们也知道一个不满足狄拉克量子化条件的磁单极将导致波函数空间平移变换的结合律破坏[3]．但是当我们对于非阿贝尔磁单极进行类似讨论的话，文章[3]所采用的方法就行不通了，其原因就是非阿贝尔场是矩阵，故不能看成可对易的数．这样文章[3]用加法运算定义的上边缘算子就必须用乘法运算来重新定义．

我们将在第二节中给出这种新的上边缘算子，然后在第三节中讨论它的应用．

二、新的上边缘算子

设一个粒子用多分量波函数 $\psi(x)$ 来描写．$\psi(x)$ 是某个群 G 的自然表示基底．考虑空间存在一个规范场

$$\hat{A}(x) = A_{\mu}^{a}(x) dx^{\mu} \hat{t}^{a}, \tag{1}$$

$\hat{t}_a$ 是群的生成元，$\hat{A}(x)$ 是群 G 的伴随表示．我们知道在最小耦合情况下，波函数在空间平移变换下按照下式变化

$$\psi(x) \to U(a)\psi(x) = W_1(x, x+a)\psi(x+a), \tag{2}$$

其中：

$$U(a) = e^{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{D}}, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{\partial} + i\boldsymbol{A}, \tag{4}$$

$$W_1(x, x+a) = W_1^{-1}(x+a, x) = p e^{i\int_x^{x+a} \hat{A}}. \tag{5}$$

本文 1985 年 4 月 23 日收到

W_1 是一个 1—闭链．0—闭链只是依赖于空间一点的函数，记为

$$W_0(x)$$

上边缘算子 δ 作用在 W_0 变为某一个 1—闭链

$$\begin{aligned}\delta W_0(x) &= W_0(x+a)W_0^{-1}(x) \\ &= W_1(x+a,x).\end{aligned} \tag{6}$$

显然 δW_0 满足条件(5)．现在我们考虑群关系

$$U(b)U(a)\phi(x) = W_2(x+b,\, x+a+b,\, x)U(a+b)\phi(x) \tag{7}$$

$$\begin{aligned}W_2(x+b,\, x+a+b,\, x) &= \delta W_1(x+a+b,x) \\ &= W_1(x,\, x+b)W_1(x+b,\, x+a+b) \\ &\quad \times W_1(x+a+b,\, x).\end{aligned} \tag{8}$$

W_2 是由 1—闭链通过上边缘算子 δ 得到的 2—闭链．将 (5) 式代入 (8) 式，很容易发现 W_2 是绕三角形 $(x,\, x+a+b,\, x+b)$ 并以 x 作为起点的线积分．

$$W_2(x+b,x+a+b,x) = pe^{i\oint \hat{A}(x)}. \tag{9}$$

如果 1—闭链

$$W_1(x+a,\, x) = \delta W_0(x) = W_0(x+a)W_0^{-1}(x),$$

则 $W_2 = 1$，也就是空间平移群的同态表示．对应到物理就是

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial_\nu \hat{A}_\mu + [\hat{A}_\mu,\, \hat{A}_\nu] = 0.$$

为了研究平移群的结合律，我们看

$$\begin{aligned}&U(a)(U(b)U(c))\phi(x) \\ &= W_1(x,\, x+a+b+c)W_2(x,x+a,\, x+a+b+c)W_2(x+a, \\ &\quad x+a+b,\, x+a+b+c)\phi(x+a+b+c) \\ &(U(a)U(b))U(c)\phi(x) \\ &= W_2(x+a,\, x+a+b,x)W_2(x+a+b,\, x+a+b+c,\, x) \\ &\quad W_1(x,\, x+a+b+c)\phi(x+a+b+c).\end{aligned} \tag{10}$$

下面我们在特殊情况下给出 W_2 在上边缘算子作用下的 3—闭链．在 $W_2 = \delta W_1$ 的情况下，W_2 在上边缘算子作用下变成

$$\begin{aligned}&\delta W_2(x+a+b,\, x+a,\, x) \\ &= W_3(x+a+b+c,x+a+b,x+a,x) \\ &= W_1(x,\, x+a+b+c)W_2(x,\, x+a,\, x+a+b+c) \\ &\quad W_2(x+a,x+a+b,\, x+a+b+c)W_1(x+a+b+c,\, x) \\ &\quad W_2(x+a+b+c,\, x+a+b,\, x)W_2(x+a+b,\, x+a,\, x).\end{aligned} \tag{11}$$

对于一般的 2—闭链，情况极为复杂，我们在此没有给出一般的定义．群的结合律的成立是 $\delta W_2 = 1$ 的充分必要条件．显然把 $W_2 = \delta W_1$ 代入(11)式自动得到了

$$\delta W_2 = 1 \tag{12}$$

也就是这些表示自动满足结合律．从某种意义讲，只对这种特殊情况给出 (11) 式的定义是平凡的．但是下面将(11)式应用到某些别的情况，就可得到一些结论．

为了方便起见，我们先将(11)式表述为直观的几何图象 (图 1)．

$$\cdot W_1(x, x+a+b+c) W_2(x, x+a, x+a+b+c)$$
$$W_2(x+a, x+a+b, x+a+b+c)$$

是沿着

$$(AD)(DA)(AB)(BD)(DB)(BC)(CD)$$

的空间移动群．另外三项是沿着

$$(DA)(AD)(DC)(CA)(AC)(CB)(BA)$$

的空间移动群．在(5)式成立的前提下，乘起来正好为 1．所以当空间的规范势在全空间解析时，空间平移群的结合律一定满足．

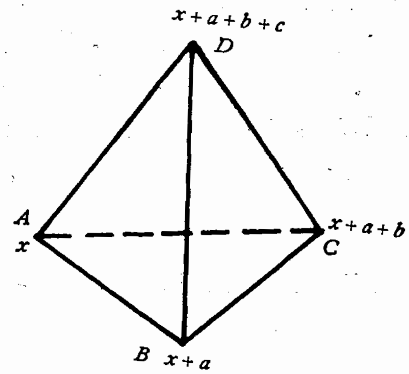

图　1

当空间存在一个磁单极时，规范势就不会在整个空间解析．必须定义两个规范势分别在各自的区域解析．当这两区域正好包含(AD),(DC),(CB),(BA)时，则(11)式中的许多 W_1 就无确切定义，当然(5)式就可能不成立，也就是结合律会遭到破坏．

在上面这种情况下，设 (AD),(DC),(CB),(BA) 的外侧(指四面体 $ABCD$)的规范势为 $\hat{A}_+$，里侧为 $\hat{A}_-$，两者之间差一个规范变换．下面我们就选择一个特殊的空间平移变换(因为有任意性)，这种定义方式在 $U(1)$ 群下，$\ln W_3$ 就是磁通量．

$$W_1(x, x+a+b+c) = W_1^{-1}(x+a+b+c, x)$$
$$= pe^{i\int_{AD}\hat{A}_-}$$
$$W_2(x, x+a, x+a+b+c) = pe^{i\int_{DABD}\hat{A}_-}$$
$$W_2(x+a, x+a+b, x+a+b+c) = pe^{i\int_{DBCD}\hat{A}_-}$$
$$W_2(x+a+b+c, x+a+b, x) = pe^{i\int_{ADCA}\hat{A}_+}$$
$$W_2(x+a+b, x+a, x) = pe^{i\int_{ACBA}\hat{A}_+}. \tag{13}$$

在这种定义下，W_3 变成了

$$W_3 = pe^{i\int_{C^{-1}}\hat{A}_-} pe^{i\int_C \hat{A}_+}. \tag{14}$$

这里 C 是路径 $ADCBA$，C^{-1} 是 C 的逆．

在这节里我们所得到的结论是这一特殊空间平移群结合律的成立，也就是 $W_3 = 1$，将给 $\hat{A}_+$ 和 $\hat{A}_-$ 有一个限制——狄拉克量子化条件．

三、应　　用

1) $U(1)$ 群

这时由于 $\hat{A}$ 是函数，W_3 就是磁通量的指数，$W_3 = 1$ 的要求显然给出狄拉克量子化条件[3]．

2) $SU(2)$ 群

我们知道 $\pi_1(SU(2)) = 0$，意味着在整个空间中用一个解析的 $\hat{A}$ 就能表达，也就是

没有真正的磁单极．平移群的结合律自动满足．

现在让我们来考虑 $SU(2)$ 群破缺到 $U(1)$ 群的规范理论[4,5,6]．这个理论是通过规范势 $\hat{A}(x)$ 和一个么模希格斯场 $\hat{l}(x)$ 来描写（$\hat{l}$ 标志着 $U(1)$ 在 $SU(2)$ 的方向）．只要把 $\hat{l}$ 变换到 $SU(2)$ 的第三方向，对应所得到的规范势就是在 $\hat{l}$ 中的规范势．这就是破缺规范理论．在有磁单极时，文章[6]指出需要两个规范变换才能把每点的 $\hat{l}(x)$ 变到 $SU(2)$ 的第三方向，这样也就得到了两个规范势．

$$\hat{l}(x) \xrightarrow{\phi_+} \hat{\lambda}_3 \qquad x \in 1 \text{ 区域}$$

$$\hat{l}(x) \xrightarrow{\phi_-} \hat{\lambda}_3 \qquad x \in 2 \text{ 区域}$$

这样就分别得到了 1,2 区域的规范势

$$\begin{aligned} \hat{A} &\to \hat{A}^+ = \phi_+^{-1}\hat{A}\phi_+ + \phi_+^{-1}d\phi_+, \\ \hat{A} &\to \hat{A}^- = \phi_-^{-1}\hat{A}\phi_- + \phi_-^{-1}d\phi_-, \end{aligned} \tag{15}$$

在 1 和 2 区域交界的地方

$$\hat{A}^+ = \Lambda^{-1}\hat{A}^-\Lambda + \Lambda^{-1}d\Lambda. \tag{16}$$

其中：$\Lambda = \phi_-^{-1}\phi_+ \in U(1)$，$\phi_\pm^{-1}\lambda^3\phi_\pm = \hat{l}$

其中 Λ 的选择是 $SU(2)$ 的第三分量(见文章[6])．

显然在前面那种路径选取情况下，(14)式不一定等于 1，除非 $\hat{A}_+$ 和 $\hat{A}_-$ 满足一定的条件，它们将会在别的地方得到讨论．对于恰好 $\hat{A}^+$ 和 $\hat{A}^-$ 只有 $U(1)$ 分量的情况，即

$$\hat{A}^\pm\Lambda = \Lambda\hat{A}^\pm. \tag{17}$$

这样

$$\begin{aligned} W_3 &= pe^{i\int_{C^-}\hat{A}^-}\, pe^{i\int_C \hat{A}^+} \\ &= pe^{i\int_{C^-}\hat{A}^-}\, \Lambda pe^{i\int_C \hat{A}^+}\, \Lambda^{-1}\phi_-^{-1}\phi_- \\ &= \phi_-^{-1} pe^{i\int_{C^-}\hat{A}}\, pe^{i\int_C \hat{A}}\, \phi_- \\ &= \phi_-^{-1}\phi_- \\ &= 1. \end{aligned} \tag{18}$$

也就是若 $\hat{A}^+$ 和 $\hat{A}^-$ 只有 $U(1)$ 分量，则结合律一定满足．另外从(18)式

$$pe^{i\int_{C^-}\hat{A}^-}\, pe^{i\int_C \hat{A}^+} = e^{i\oint F} = 1.$$

要求磁单极的强度满足量子化条件

$$2eg = 2n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2\cdots \tag{19}$$

e 是 $SU(2)$ 规范理论的耦合常数（以前的公式 $e = 1$），g 是磁荷．方程(18)表明了不满足(19)的磁单极将与(17)式矛盾．

3) $SO(3)$ 群

我们知道 $SO(3)$ 和 $SU(2)$ 的大范围性质不一样．从 $\pi_1(SO(3)) = Z_2$，我们知道 $SO(3)$ 群中有一个平凡的纤维丛，还有一个非平凡丛．

对 $SO(3)$ 的规范理论和破缺到 $U(1)$ 的规范理论，平凡丛的讨论完全和 $SU(2)$ 一样．稍微有一点不同的地方在于(19)式变成

$$2eg = n \quad n = 0, \pm 1, \cdots \tag{20}$$

因子 2 的差别在于

$$e^{i\lambda_3(SU(2))4\pi} \quad e^{i\lambda_3(SO(3))2\pi} = 1$$

这个原因．其中 $\lambda_3(SU(2))$ 和 $\lambda_3(SO(3))$ 分别是 $SU(2)$ 和 $SO(3)$ 群的生成元．

对于 $SO(3)$ 的非平凡丛需要将来讨论．

感谢郭汉英同志给予的帮助．

参　考　文　献

[1] K. C. Chou, H. Y. Guo, K. Wu, X. C. Song Beijing preprint AS-ITP-84-018 B. Zumino Seattle preprint LBL 16746 UCD-PTH-83/IC R. Stora Ahnecy preprint LAAP-Th-94(1983).

[2] L. D. Faddeev *Phys. Lett.*, **B**.145(1984), 81.

[3] R. Jackiw MIT preprint CPT 1209(1984) Hou Bo-yu, Hou Bo-yuan Northwestern University. China preprint NWU 84-8.
Y. S. Wu A. Zee University of Washington 40084-29 P4 (1984).

[4] G. t'Hooft Nucl. Phys., **B79**(1974), 276.

[5] 侯伯宇、戴元本、葛墨林，中国物理，**25**(1976)，514.

[6] 吴泳时、陈时、杜东生、郭汉英，高能物理与核物理，**1**(1977)，53.

A NEW CO-BOUNDARY OPERATOR AND ITS APPLICATIONS

Chou Kuang-chao　Wu Yue-liang　Xie Yan-bo

(Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica)

Abstract

In this note new co-boundary operators are defined in the product form. The associative composition law of spatial translation group field is discussed using these new operators. The quantization condition of monopoles in $SU(2)$ and $SU(3)$ gauge theories follows easily from the new formalism.