

# Dyson 玻色子展开与原子核的相互作用玻色子模型

杨 泽 森

(北京大学物理系)

## 摘 要

根据修正的 Jancovici-Schiff (MJS) 代换关于玻色子描述可以用作原子核的费米子描述的中间步骤的观点,本文把相互作用玻色模型 (IBM) 看作在这种中间步骤引用的一种近似。文中针对同类价核子的“多- $\nu$ ”组态以及包含两体有效相互作用的费米子哈密顿量,按照通常的玻色子展开选择出结构上比较简单的玻色子哈密顿量;借此通过一个么正变换建立了从微途径确定  $s, d$  玻色子及 IBM 哈密顿量的方法;根据 MJS 代换给出了把 IBM 态矢量变换为费米子态矢量的一般公式。

## 一、引 言

近年来我们从玻色子展开和修正的 Jancovici-Schiff (MJS) 代换的观点,借助相互作用玻色子模型 (IBM) 对原子核的集体运动进行了微观研究。关于这一理论方法的要点,曾在文献[1, 2, 3]中谈及,本文将侧重于基本观点的系统阐述。

IBM 的基本出发点是用少数代表核子对的几类玻色子来描述偶偶重核和中重核的低能集体态。但是核内的核子对不能直接当成玻色子,因此在把 IBM 的观念纳入一种微观理论时,必须找出与泡利原理一致的可行方法。当然,具体办法是随着理论方案而有所不同的。例如,在 Arima 等人的  $O-I-A$  方法中<sup>[4]</sup>,把由  $S, D$  核子对构成的  $S-D$  子空间与 IBM 态空间对应起来,这意味着除了保证独立态数正确之外,泡利原理其他方面的影响主要归结到力学量的玻色子表示上。又如,杨立铭先生的方法是直接在费米子态空间内工作。另一方面,如果采用通常形式的 Dyson 展开或者 Holston-primakoff 展开,就应当用所谓理想玻色子及相应的真空态构成玻色子态空间,然后把其中的“物理”子空间与原子核的态空间相对应。这样做有可能选出结构上比较简单的玻色子哈密顿量,但是在物理子空间内求它的本征态又是不容易做到的。

在我们的方案中,一方面借助通常的玻色子展开把费米子哈密顿量变换为玻色子哈密顿量,另一方面采用文献[5]中描述的 MJS 代换来避免求物理本征的问题。即是说,

在求玻色子哈密顿量的本征态时,不需要局限在“物理”子空间之内,只是要求它不是完全非物理的态矢量。这样的玻色子态矢量并不直接描述原子核的状态,但是经过 MJS 代换变成费米子态矢量之后,就成为原来的费米子哈密顿量的本征态。我们方法的特点就是按照 MJS 代换把玻色子描述当成费米子描述的一个中间步骤,并把 IBM 看作这个中间步骤中的一种近似。这样既可以借助 IBM 方法近似地计算原子核低集体态的能量,还可求得近似的费米子波函数。

下面第二节讨论把费米子哈密顿量变换为玻色子哈密顿量的问题,并针对这种特定形式的哈密顿量阐明 MJS 代换的要点。第三节研究 IBM 玻色子及 IBM 哈密顿量的确定。第四节根据 MJS 代换给出把 IBM 态矢量变换为费米子态矢量的一般公式。

## 二、哈密顿量的玻色子表示与 MJS 代换

本文研究满壳层外只有一类价核子的情形。设有  $x$  个价核子处在  $k$  个能级,于是壳模型组态为

$$(i_1 i_2 \cdots i_k)^x \quad (2.1)$$

其中  $i_1 i_2 \cdots i_k$  代表  $k$  个单粒子能级,  $i$  是单粒子态量子数  $nljm$  前三个的简写。用  $|0\rangle$  代表  $x=0$  的满壳层,  $a_{im}^\dagger$  及  $a_{im}$  代表价核子的产生、湮灭算符,并用  $(\mu)$ 、 $(\nu)$  等代表  $(nljm)$ , 故

$$a_\mu |0\rangle = 0 \quad (2.2)$$

$$a_\mu a_\nu^\dagger + a_\nu^\dagger a_\mu = \delta_{\mu\nu} \quad (2.3)$$

$$a_\mu a_\nu + a_\nu a_\mu = 0 \quad (2.4)$$

当  $x$  达到最大值  $\bar{x} = \Sigma(2j+1)$  时就形成一个新的满壳层,对于  $x > \frac{1}{2}\bar{x}$  的情形,我们将采用关于这个新的满壳层的空穴表示法,为此只需把湮灭算符的时间反演看作空穴的产生算符。这里仍针对粒子表示法来叙述。

设价核子之间的有效相互作用是两体型的,于是哈密顿量可写成如下的形式:

$$H_f = \sum_{\mu} E_{\mu} a_{\mu}^{\dagger} a_{\mu} + \sum_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} P_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} a_{\mu_1}^{\dagger} a_{\mu_2}^{\dagger} a_{\mu_3} a_{\mu_4} \quad (2.5)$$

$$P_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} = P_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4}^* \quad (2.6)$$

$$P_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} = -P_{\mu_2 \mu_1 \mu_3 \mu_4} = P_{\mu_3 \mu_4 \mu_1 \mu_2} \quad (2.7)$$

价核子的任意态矢量  $|\Psi\rangle$  可表示为:

$$|\Psi\rangle = \Sigma C a_{\mu_1}^{\dagger} a_{\mu_2}^{\dagger} \cdots a_{\mu_x}^{\dagger} |0\rangle \quad (2.8)$$

在(2.5)及(2.8)式中涉及的每个单粒子态  $(\mu)$  都限制在(2.1)所示的  $k$  个单粒子能级内。

按照 Dyson 玻色子展开<sup>[6]</sup>, 费米子态矢量  $|\Psi\rangle$  与玻色子态矢量  $|\Phi\rangle$  之间的对应关系,由所谓 Usui 变换算符  $U$  决定<sup>[7]</sup>:

$$|\Phi\rangle = U |\Psi\rangle \quad (2.9)$$

$$U = \langle 0 | e^{\frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} b_{\mu\nu}^{\dagger} a_{\nu}^{\dagger} a_{\mu}} | 0 \rangle \quad (2.10)$$

其中  $b_{\mu\nu}^+$  是理想玻色子的产生算符,  $|0\rangle$  是相应的真空态, 它们满足如下的关系:

$$b_{\mu\nu}|0\rangle = 0 \quad (2.11)$$

$$b_{\mu\nu} = -b_{\nu\mu} \quad (2.12)$$

$$[b_{\alpha\beta}, b_{\mu\nu}^+] = \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu} \quad (2.13)$$

$$[b_{\alpha\beta}, b_{\mu\nu}] = 0 \quad (2.14)$$

与(2.9)式相应, 一个费米子算符  $g$  的玻色子表示  $g_L$  由下式定义:

$$Ug = g_L U \quad (2.15)$$

特别是, 哈密顿量  $H_f$  的玻色子表示, 是指满足如下条件的玻色子算符  $H_B$ :

$$UH_f = H_B U \quad (2.16)$$

对于基本的算符  $a_\mu a_\nu$ ,  $a_\mu^+ a_\nu$  及  $a_\mu^+ a_\nu^+$ , 有

$$U a_\mu a_\nu = b_{\nu\mu} U \quad (2.17)$$

$$U a_\mu^+ a_\nu = \left( \sum_\lambda b_{\mu\lambda}^+ b_{\nu\lambda} \right) U \quad (2.18)$$

$$U a_\mu^+ a_\nu^+ = B_{\mu\nu}^+ U \quad (2.19)$$

其中

$$B_{\mu\nu}^+ = b_{\mu\nu}^+ - \sum_{\lambda\lambda'} b_{\mu\lambda}^+ b_{\nu\lambda'}^+ b_{\lambda\lambda'} \quad (2.20)$$

从(2.18)可以看出, 价核子数算符的玻色子表示为:

$$\hat{n}_B = \sum_\mu (a_\mu^+ a_\mu)_L = \sum_{\mu\nu} b_{\mu\nu}^+ b_{\mu\nu} = 2 \sum_{\mu < \nu} b_{\mu\nu}^+ b_{\mu\nu} \quad (2.21)$$

这表明, 一个理想玻色子携带着 2 个单位的价核子数。

在给定  $H_f$  之后, 根据(2.16)–(2.20)可求出  $H_B$ , 但结果不是唯一的。为了选出结构上比较简单的  $H_B$ , 我们按照如下的办法寻找两体相互作用项的玻色子表示:

$$\begin{aligned} U a_\alpha^+ a_\beta^+ a_\tau a_\delta &= B_{\alpha\beta}^+ U a_\tau a_\delta \\ &= b_{\alpha\beta}^+ U a_\tau a_\delta - \sum_{\lambda\lambda'} b_{\alpha\lambda}^+ b_{\beta\lambda'}^+ b_{\lambda\lambda'} U a_\tau a_\delta \\ &= b_{\alpha\beta}^+ b_{\delta\tau} U - \sum_\lambda b_{\alpha\lambda}^+ U a_\beta^+ a_\delta a_\lambda a_\tau \end{aligned}$$

由此再利用(2.17)及(2.18)即得:

$$U a_\alpha^+ a_\beta^+ a_\tau a_\delta = \left( b_{\alpha\beta}^+ b_{\delta\tau} - \sum_{\lambda\lambda'} b_{\alpha\lambda}^+ b_{\beta\lambda'}^+ b_{\delta\lambda'} b_{\tau\lambda} \right) U \quad (2.22)$$

这个结果, 也可由(2.18)以及如下的恒等式得出:

$$a_\alpha^+ a_\beta^+ a_\tau a_\delta = \delta_{\beta\tau} a_\alpha^+ a_\delta - a_\alpha^+ a_\tau a_\beta^+ a_\delta \quad (2.23)$$

按照(2.18)及(2.22)改写方程(2.16)的左方, 即可找到  $H_B$  的如下表达式:

$$H_B = H_B^{(1)} + H_B^{(2)} \quad (2.24)$$

$$H_B^{(1)} = \sum_\alpha E_\alpha \sum_\nu b_{\alpha\nu}^+ b_{\alpha\nu} + \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} P_{\alpha\beta\gamma\delta} b_{\alpha\beta}^+ b_{\gamma\delta} \quad (2.25)$$

$$H_B^{(2)} = - \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} P_{\alpha\beta\gamma\delta} \sum_{\mu\nu} b_{\alpha\mu}^+ b_{\beta\nu}^+ b_{\gamma\mu} b_{\delta\nu} \quad (2.26)$$

我们知道,如果严格地使用玻色子展开方法,那么对应于给定  $H_f$  的各种  $H_B$  是互相等价的。不过我们现在正是要建立近似的理论形式,所以  $H_B$  的不同表达式会导致不同的结果。我们选取(2.24)–(2.26)的特殊形式,主要是着眼于结构简单及其厄米性质。而能够选出这样的表达式,又是因为以明显形式维护了数守恒的原则。

让我们指出,由(2.24)–(2.26)表达的  $H_B$  同时又是 Holstein-Primakoff 展开的玻色子哈密顿量。在这种展开中,费米子态矢量  $|\Psi\rangle$  与玻色子态矢量  $|\Phi\rangle$  之间的对应关系,由所谓 Marumori 变换算符  $U_M$  决定<sup>[6,8]</sup>:

$$|\Phi\rangle = U_M |\Psi\rangle \quad (2.27)$$

$$U_M = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(2s)!! \sqrt{(2s-1)!!}} \langle 0 | \left( \sum_{\mu\nu} b_{\nu\mu}^+ a_{\nu} a_{\mu} \right)^s | 0 \rangle \quad (2.28)$$

与(2.27)相应,费米子算符  $g$  的玻色子表示  $g_M$  由下式定义:

$$U_M g = g_M U_M \quad (2.29)$$

对于  $a_{\mu} a_{\nu}$  等基本算符,有:

$$U_M a_{\mu} a_{\nu} = \frac{1}{\sqrt{1 + \hat{n}_B}} B_{\nu\mu} U_M \quad (2.30)$$

$$U_M a_{\mu}^+ a_{\nu} = \left( \sum_{\lambda} b_{\mu\nu}^+ b_{\nu\lambda} \right) U_M \quad (2.31)$$

$$U_M a_{\mu}^+ a_{\nu}^+ = B_{\mu\nu}^+ \frac{1}{\sqrt{1 + \hat{n}_B}} U_M \quad (2.32)$$

现在仍然存在类似于(2.22)的关系式,即:

$$U_M a_{\alpha}^+ a_{\beta}^+ a_{\gamma} a_{\delta} = \left( b_{\alpha\beta}^+ b_{\delta\gamma} - \sum_{\lambda\lambda'} b_{\alpha\lambda}^+ b_{\beta\lambda'}^+ b_{\delta\lambda'} b_{\gamma\lambda} \right) U_M \quad (2.33)$$

因此,(2.24)–(2.26)中的  $H_B$  满足如下的条件:

$$U_M H_f = H_B U_M \quad (2.34)$$

这说明,  $H_B$  又可以看作  $H_f$  在 Holstein-primakoff 展开中的玻色子表示。

根据以上选择的玻色子哈密顿量,有效薛定谔方程如下:

$$H_B \Phi(b^+) | 0 \rangle = \epsilon \Phi(b^+) | 0 \rangle \quad (2.35)$$

如果不加改动地贯彻 Dyson 展开或 Holstein-primakoff 展开,就应当在“物理”子空间中使用这个方程。这是因为,无论是按照(2.9)或者(2.27),都只允许把“物理”的态矢量与费米子态矢量相对应。现在的  $H_B$  与物理子空间的投影算符  $P$  是对易的:

$$P H_B = H_B P \quad (2.36)$$

算符  $P$  可表示为

$$P = U_M U_M^+$$

由此及(2.34)式,并注意  $H_B$  的厄米性质,即可证明(2.36)式。因此,从原则上说,可以对  $H_B$  的本征态  $\Phi(b^+) | 0 \rangle$  进行投影而得到“物理”本征态(只要  $P\Phi(b^+) | 0 \rangle$  不是零,它就是“物理”本征态)。Janssen 等人曾在文献[6]中提出,借助  $H_B^+$  的本征态作变换  $b_{\mu\nu}^+ \rightarrow B_{\mu\nu}^+$  求  $H_B$  的本征态。现在  $H_B^+$  即  $H_B$ , 而  $\Phi(B^+) | 0 \rangle$  与  $P\Phi(b^+) | 0 \rangle$  除常系数外是相同的。对物理态矢量  $P\Phi_1(b^+) | 0 \rangle$  与  $P\Phi_2(b^+) | 0 \rangle$  求算符  $g$  的矩阵元的公式可写成:

其中

 $\Phi(E$ 

于过

 $H_B$ 

根据

因此

其中

如果

根据

其中

(2.4

如果

某些

合类

的2

 $\Phi_f(\$ 

即

动

6.7.2,

利)

$$g_{12} = \frac{(0|\Phi_1(b^+)^+g_M P\Phi_2(b^+)|0)}{\sqrt{(0|\Phi_1(b^+)^+P\Phi_1(b^+)|0)(0|\Phi_2(b^+)^+P\Phi_2(b^+)|0)}} \quad (2.37)$$

其中  $g_M$  是  $g$  在 Holstein-Primakoff 展开中的玻色子表示. 问题在于, 要用  $P\Phi(b^+)|0\rangle$  或  $\Phi(B^+)|0\rangle$  求出物理态矢量的具体表达式或者计算矩阵元, 实际上是难以实现的.

在本文的引言部分已经说明, 我们是按照 MJS 代换的观点来采用玻色子展开的. 关于这一观点的一般阐述, 已在文献[5]中给出, 对于现在的数守恒的  $H_f$ 、 $H_B$  以及  $H_B^+ = H_B$  的情形, 可简述如下. 以  $U^+$  作用于方程(2.35)的两端, 注意  $U^+H_B = H_fU^+$  有

$$H_fU^+\Phi(b^+)|0\rangle = \varepsilon U^+\Phi(b^+)|0\rangle \quad (2.38)$$

根据(2.17)的厄米共轭以及  $U^+|0\rangle = |0\rangle$ , 得到

$$U^+\Phi(b^+)|0\rangle = \Phi(b_{\mu\nu}^+ \rightarrow a_{\mu}^+a_{\nu}^+)|0\rangle \quad (2.39)$$

因此(2.38)变为

$$H_f\Phi_f(a^+)|0\rangle = \varepsilon\Phi_f(a^+)|0\rangle \quad (2.40)$$

其中

$$\Phi_f(a^+)|0\rangle = \Phi(b_{\mu\nu}^+ \rightarrow a_{\mu}^+a_{\nu}^+)|0\rangle \quad (2.41)$$

如果从 Holstein-Primakoff 展开出发, 就用  $U_M^+$  作用于(2.35), 于是

$$H_fU_M^+\Phi(b^+)|0\rangle = \varepsilon U_M^+\Phi(b^+)|0\rangle \quad (2.42)$$

根据(2.30)以及  $U_M^+|0\rangle = |0\rangle$  可证明

$$U_M^+\Phi(b^+)|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{(\hat{n}_f - 1)!!}} \Phi(b_{\mu\nu}^+ \rightarrow a_{\mu}^+a_{\nu}^+)|0\rangle \quad (2.43)$$

其中  $\hat{n}_f$  是价核子数算符, 它与  $H_f$  是对易的, 因此 (2.42) 也导致 (2.40). 方程 (2.35)、(2.40)以及 (2.41) 表明, 借助  $H_B$  的本征态  $\Phi(b^+)|0\rangle$  构成的费米子态矢量  $\Phi_f(a^+)|0\rangle$  如果不为零, 就是  $H_f$  的本征态, 本征值仍为  $\varepsilon$ . 这就是本文情形下的 MJS 代换.  $H_B$  的某些简并本征态在变换为费米子态矢量之后, 正交性可能被破坏, 但可以作适当的线性组合来恢复. 如果原来有多余的态, 最后也会消失. 按照 MJS 代换, 我们不用方程 (2.35) 的本征态 (允许偏离物理子空间) 来代表原子核的状态, 而是用作构成费米子态矢量  $\Phi_f(a^+)|0\rangle$  的工具. 至于 IBM, 则看作在求解方程(2.35)时引用的一种近似.

### 三、IBM 玻色子及 IBM 哈密顿量的确定

首先引入如下的  $Q$ -玻色子产生算符  $Q_{\tau\pi JM}^+$ :

$$Q_{\tau\pi JM}^+ = \sum_{\alpha < \beta} \chi_{\alpha\beta}^{\tau\pi J}(M) b_{\alpha\beta}^+ \quad (3.1)$$

$$H_B Q_{\tau\pi JM}^+ |0\rangle = \varepsilon_{\tau\pi J} Q_{\tau\pi JM}^+ |0\rangle \quad (3.2)$$

即是说,  $Q_{\tau\pi JM}^+ |0\rangle$  是  $H_B$  的能量为  $\varepsilon_{\tau\pi J}$  而价核子数为 2 的本征态,  $\pi JM$  是宇称和角动量量子数,  $\tau = 0, 1, 2, \dots$  代表在相同  $\pi J$  下  $\varepsilon$  值的次序, 即对于  $\tau_1 < \tau_2$  有  $\varepsilon_{\tau_1\pi J} \leq \varepsilon_{\tau_2\pi J}$ . 选择归一因子, 可保证  $Q$  算符满足标准的玻色对易关系:

$$[Q_{\tau\pi JM}, Q_{\tau'\pi'J'M'}^+] = \delta_{\tau\tau'} \delta_{\pi\pi'} \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \quad (3.3)$$

利用这些算符可把  $H_B$  改写为:

$$H_B = \sum_{\tau\pi JM} \epsilon_{\tau\pi J} Q_{\tau\pi JM}^+ Q_{\tau\pi JM} + \sum_I \sum_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4} V(\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4 I) [(Q_{\sigma_1}^+ Q_{\sigma_2}^+)_I (Q_{\sigma_3} Q_{\sigma_4})_I]_0 \quad (3.4)$$

其中  $\sigma$  代表  $\tau\pi JM$ ,  $Q_{\tau\pi JM}$  即  $(-1)^{J+M} Q_{\tau\pi J-M}$ , 系数  $V$  为:

$$V(\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4 I) = \frac{1}{4} \sqrt{2I+1} (0 | [Q_{\sigma_1}^+ Q_{\sigma_2}^+]_I^\dagger H_B^{(2)} [Q_{\sigma_3}^+ Q_{\sigma_4}^+]_I | 0) \quad (3.5)$$

考虑到在适当有效相互作用下,  $\tau=0$  而  $J^*$  值为  $0^+$  及  $2^+$  的  $Q$ -玻色子具有最强的集体性, 我们把  $Q_{0+0}^+$  及  $Q_{0+2M}^+$  分别看成是  $s$  玻色子及  $d$  玻色子的产生算符  $s^+$  及  $d_m^+$  的主要成份, 其它  $Q$ -玻色子对于  $s^+$  及  $d_m^+$  的结构的影响, 则通过一个么正变换作近似的处理. 在目前的工作中, 我们限于考虑  $\tau=0, 1$  而  $J^*$  值为  $0^+$  及  $2^+$  的  $Q$ -玻色子之间的耦合, 即在 (3.4) 式中把  $(Q_{0+0}, Q_{1+0}, Q_{0+2M}, Q_{1+2M})$  玻色子与其余  $Q$ -玻色子之间的耦合项直接略去, 然后寻找一个只依赖于这一部分自由度的么正算符  $W$ , 以保证  $Q_{0+0} - Q_{0+2}$  子空间在  $WH_B W^+$  作用下保持不变. 在准到  $Q^+ Q^+ Q Q$  项时, 有

$$W = e^T \approx 1 + T^{(22)} \quad (3.6)$$

$$WH_B W^+ \approx H_B + [T^{(22)}, H_B^{(1)}] \quad (3.7)$$

其中  $T^{(22)}$  是只包含  $\tau=0, 1$  而  $J^*$  值为  $0^+$  及  $2^+$  的  $Q$ -玻色子  $Q^+ Q^+ Q Q$  项的转动不变和时间反演不变的反厄米算符, 其选择方法是正好把 (3.7) 右端不保持  $Q_{0+0} - Q_{0+2}$  子空间不变的项加以清除. 这样, (3.7) 右端的  $Q_{0+0} - Q_{0+2}$  部分就可以看成是 IBM 哈密顿量  $h$  在  $W$  变换下所成的算符  $WhW^+$ , 同时这又正好是  $H_B$  中的纯  $Q_{0+0} - Q_{0+2}$  部分, 因此在上述近似下有:

$$WhW^+ = H_B \text{ 中的 } (Q_{0+0} - Q_{0+2}) \text{ 部分.} \quad (3.8)$$

$$s^+ = W^+ Q_{0+0}^+ W \quad (3.9)$$

$$d_m^+ = W^+ Q_{0+2m}^+ W \quad (3.10)$$

由此可求出 IBM 哈密顿量的如下表达式:

$$\begin{aligned} h = & \epsilon_s s^+ s + \epsilon_d \sum_m d_m^+ d_m + \sum_I \frac{1}{2} \sqrt{2I+1} C_I [(d^+ d^+)_I (d d)_I]_0 \\ & + \frac{1}{2} v_1 \{ (d^+ d^+)_{0s} s + s^+ s^+ (d d)_0 \} \\ & + \sqrt{\frac{5}{2}} v_2 \{ [(d^+ d^+)_{2d}]_{0s} + s^+ [d^+ (d d)_2]_0 \} \\ & + \frac{1}{2} v_3 s^+ s^+ s s + \sqrt{5} v_4 s^+ (d^+ d)_0 s \end{aligned} \quad (3.11)$$

其中

$$d_m = (-1)^m d_{-m} \quad (3.12)$$

$$\epsilon_s = \epsilon_{0+0} \quad (3.13)$$

$$\epsilon_d = \epsilon_{0+2} \quad (3.14)$$

$$C_I = \frac{1}{2} (0 | (Q_{0+2} Q_{0+2})_I H_B^{(2)} (Q_{0+2}^+ Q_{0+2}^+) | 0) \quad (3.15)$$

在  
确  
密  
易

其  
中

即  
是  
函  
数  
以  
此

引  
用  
是  
一

中  
的  
题

$$v_1 = \frac{1}{2} (0 | Q_{0+00} Q_{0+00} H_B^{(2)} (Q_{0+2}^+ Q_{0+2}^+) | 0) \quad (3.16)$$

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (0 | Q_{0+20} Q_{0+00} H_B^{(2)} (Q_{0+2}^+ Q_{0+2}^+) | 0) \quad (3.17)$$

$$v_3 = \frac{1}{2} (0 | Q_{0+00} Q_{0+00} H_B^{(2)} Q_{0+00}^+ Q_{0+00}^+ | 0) \quad (3.18)$$

$$v_4 = (0 | Q_{0+20} Q_{0+00} H_B^{(2)} Q_{0+00}^+ Q_{0+20}^+ | 0) \quad (3.19)$$

在给定了壳模型单粒子能量和波函数以及价核子相互作用,并通过求解本征值方程(3.2)确定了  $(Q_{0+0}, Q_{0+2})$  及  $(Q_{1+0}, Q_{1+2})$  玻色子后,就可以确定么正算符  $W$  以及 IBM 哈密顿量  $h$ . 而且只利用(3.13)—(3.19)中各量的数值以及  $(s, d)$  与  $(s^+, d^+)$  之间的对易关系,就可以求出  $h$  的本征值,并且用  $s^+$  及  $d^+$  算符表示出  $h$  的本征态.

#### 四、借助 IBM 得到的费米子波函数

IBM 哈密顿量  $h$  的本征函数  $\Phi(s^+ d^+) | 0 \rangle$  即是  $H_B$  的近似本征函数,即

$$h \Phi(s^+ d^+) | 0 \rangle = \varepsilon \Phi(s^+, d^+) | 0 \rangle \quad (4.1)$$

$$H_B \phi(Q^+) | 0 \rangle \approx \varepsilon \phi(Q^+) | 0 \rangle \quad (4.2)$$

其中  $\Phi(s^+, d^+)$  是  $s^+, d_m^+$  的函数,  $\phi(Q^+)$  是  $(Q_{0+00}^+, Q_{1+00}^+ Q_{0+2m}^+, Q_{1+2m'}^+)$  的函数,而  $\phi(Q^+) | 0 \rangle = W^+ \Phi(s^+, d^+) | 0 \rangle$ . 经过 MJS 代换后,由(4.2)得到:

$$H_f | \phi_f \rangle \approx \varepsilon | \phi_f \rangle \quad (4.3)$$

$$| \phi_f \rangle = \phi(Q^+ \rightarrow \sum \chi_{\alpha\beta}^{\alpha} a_{\alpha}^+ a_{\beta}^+) | 0 \rangle. \quad (4.4)$$

即是说,如果  $|\phi_f\rangle$  不是零,它就是原来的费米子哈密顿量  $H_f$  的本征值为  $\varepsilon$  的近似本征函数. 因此,可以借助于 IBM 近似地求得原子核低集体态的费米子波函数,由此当然可以按照通常的费米子方法计算各种矩阵元.

#### 五、结 语

在我们的方法中,玻色子描述只是一种中间步骤,而 IBM 则被看作这个中间步骤中引用的近似.  $h$  的本征值代表能量的近似值,但它的本征函数不能象唯象 IBM 那样使用,这使矩阵元的计算比唯象模型复杂了,但求出费米子波函数(按照公式(4.4))本身就是一种重要结果.

由于在费米子描述中没有采用准粒子,哈密顿量  $H_f$  是数守恒的. 因此在中间步骤中,无论采用 Dyson 开展或者 Holstein-Primakoff 展开,都可以选择本文所用的玻色哈密顿量,并以同样的方法决定 IBM 玻色子和 IBM 哈密顿量以及运用 MJS 代换. 在本文的题目中指明 Dyson 展开只不过是使名称简单.

本文的方法也可推广到同时存在中子价核子和质子价核子的情形.

## 参 考 文 献

- [1] 杨泽森, 杨立铭, 会议文集:  
Interacting Bose-Fermi Systems in Nuclei, ed: F. Iachello (Plenum, New York, 1981).
- [2] 杨泽森, 刘庸, 田晓岑, 高能物理与核物理, 6(1982), 472;  
Chin. Phys., 3(1983), 345.
- [3] 刘庸, 田晓岑, 杨泽森, 高能物理与核物理, 7(1983), 724.
- [4] T. Otsuka, A. Arima and F. Iachello, *Nucl. Phys.*, A309(1978), 1.
- [5] 杨泽森, 高能物理与核物理, 8(1984), 75.
- [6] D. Janssen, F. Donau, S. Frauendorf and R. V. Jolos, *Nucl. Phys.*, A172(1971), 145.
- [7] T. Usui, *Progr. Theor. Phys.*, 23(1960), 787.
- [8] T. Marumori et al., *Progr. Theor. Phys.*, 31(1964), 1009.

DYSON'S BOSON EXPANSION AND THE  
INTERACTING BOSON MODEL

YANG ZE-SEN (TSE-SEN YANG)

(Department of Physics, Peking University)

## ABSTRACT

Based on the so-called modified Jancovici-Schiff (MJS) substitution the interacting boson model (IBM) is treated as an approximation to the boson description adopted in the intermediate stage of a fermion description of nuclei. A unitary transformation is introduced to determine microscopically the IBM bosons and the IBM Hamiltonian. A general formula is given to transform the IBM state vectors back into the fermion state space.

象  
型  
计  
分  
殊  
指  
角  
直原  
他  
更  
Fric  
mül  
ach  
结