第9卷 第2期 高能物理与核物理 Vol. 9. No. 2
1985年3月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS Mar., 1985

费米子和 Julia-Zee 双子系统的束缚态条件

汪克林（中国科学技术大学）　　张鉴祖（山西大学）

摘　　要

本文讨论了一个 $SU(2)$ Higgs 场与费米子场的标量耦合模型. 主要结果是: (1) 把 Julia-Zee 双子处理为外势，得到了费米子径向波函数所满足的联立方程组;(2)求出了无穷远处和零点附近的渐近解;(3)定性地讨论了费米子束缚态存在的必要条件. 发现，对于磁单极情形,当 $h\to 0$ 时,必不存在费米子束缚态. 对于双子情形,在 $h\to 0$ 的情况下,费米子束缚态可能存在.

一、引　　言

近来,人们对费米子与 'tHooft-Polyakov 磁单极[1]系统的束缚态是否存在的问题，表现出很大的兴趣[2-8]. 在[4]中提出了一个 Higgs 场与费米场之间的标量耦合模型,指出费米子与磁单极组成束缚系统是可能的.

费米子与 Julia-Zee 双子[9]组成的系统也曾被考虑. [10]曾得到在双子外场中无质量费米子的零能段定解. Callen[11] 考虑过在双子外势中无质量费米子的量子激发效应,发现双子的电荷会消失,亦即当无质量费米子与双子耦合时双子会变成纯粹的磁单极. 但是,与这些有趣的结果相联系,这里还有两个问题需进一步研究. 第一个问题是费米子的质量. 当引入费米子质量项后,束缚态条件是:

$$-m < E < m, \tag{1}$$

此处,m 和 E 分别是费米子的质量和能量. 第二个问题是费米子与双子间的相互作用.

本文修改了[4]的标量耦合模型,它保证模型在全空间都有确定的定义. 这与非线性 σ 模型类似. 我们讨论了规范场-Higgs 场-费米场相互耦合系统的联立径向方程组，发现它是不封闭的. 在一般情形下，求得封闭的径向方程组是较为复杂的，这需要修改 Julia-Zee 双子的 Ansatz[9].

二、Higgs 场和费米场的标量耦合模型

在这个模型中,拉氏量为

本文 1984 年 2 月17日收到,同年 9 月 3 日收到修改稿.

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}+\frac{1}{2}(D_\mu H)_a(D^\mu H)_a+\frac{1}{2}\mu^2 H^2_a$$

$$-\frac{1}{8}\lambda(H^2_a)^2+\bar{\phi}(i\gamma^\mu D_\mu-m+h\sigma)\phi, \tag{2}$$

$$\sigma\equiv(\mu^2+H^aH^a)^{1/2}, \tag{3}$$

此处

$$\begin{aligned}F^a_{\mu\nu}&=\partial_\mu A^a_\nu-\partial_\nu A^a_\mu+g\epsilon^{abc}A^b_\mu A^c_\nu,\\(D_\mu H)_a&=\partial_\mu H_a+g\epsilon^{abc}A^b_\mu H^c,\\D_\mu\phi&=\partial_\mu\phi-\frac{i}{2}g\tau^a A^a_\mu\phi.\end{aligned} \tag{4}$$

参数 μ^2、λ、g 和 h 都是正数．由(3)式可得如下方程组:

$$D_\mu\boldsymbol{F}_{\mu\nu}+g\boldsymbol{H}\times D_\nu\boldsymbol{H}+\frac{1}{2}g\bar{\phi}\gamma_\nu\boldsymbol{\tau}\phi=0, \tag{5}$$

$$D_\mu D^\mu\boldsymbol{H}-\mu^2\boldsymbol{H}+\frac{1}{2}\lambda H^2_a\boldsymbol{H}-h\bar{\phi}\phi\frac{\boldsymbol{H}}{(\mu^2+H^2_a)^{1/2}}=0, \tag{6}$$

$$(i\gamma^\mu D_\mu-m)\phi+h(\mu^2+H^2_a)^{1/2}\phi=0. \tag{7}$$

Julia-Zee 双子的 Ansatz 为[9]:

$$A^a_i=\epsilon_{aij}\hat{r}_j[K(r)-1]/gr,\quad A^a_0=-\hat{r}_aJ(r)/gr,\; H^a=-\hat{r}_aH(r)/gr \tag{8}$$

处于定态中的费米子的相应 Ansatz 是

$$\phi=e^{-iEt}\begin{bmatrix}\zeta\\ \xi\end{bmatrix}, \tag{9}$$

此处 ζ 和 ξ 是上、下狄拉克分量,在同位旋空间按如下方式分解:

$$\begin{aligned}\zeta&=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{r}(R_1(r)+iS_1(r)\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{r})\chi,\\ \xi&=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{r}(R_2(r)+iS_2(r)\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{r})\chi.\end{aligned} \tag{10}$$

其中

$$\chi=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\\ \\ \begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}\end{bmatrix}, \tag{11}$$

上式中, $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$和$\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$是同位旋量． χ 是总角动量

$$\boldsymbol{J}^2=\left(\boldsymbol{L}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}\right)^2$$

的本征值为零的本征态． R_i, $S_i(i=1,2)$ 是 r 的复函数．应用 Ansatz (8)—(11), 方程组(5)—(7)化为:

$$\epsilon_{ajk}\hat{r}_k\left[-\frac{J^2K}{gr^3}-\frac{K''}{gr}+\frac{K^3-K}{gr^3}+\frac{H^2K}{gr^3}\right]$$

$$-\frac{1}{r^2}gR_e[\delta_{ja}(S^*_1S_2-R^*_1R_2)-2\hat{r}_a\hat{r}_jS^*_1S_2+\epsilon_{ajk}\hat{r}_k(S^*_1R_2+R^*_1S_2)]=0, \tag{12a}$$

$$r^2J'' - 2JK^2 + \frac{1}{2}g^2rI_m(R_1S_1^* + R_2S_2^*) = 0 \tag{13a}$$

$$r^2H'' - 2HK^2 + \mu^2r^2H - \frac{\lambda}{2g^2}H^3$$

$$+ ghr\frac{H}{(g^2\mu^2r^2 + H^2)^{1/2}}(|R_1|^2 + |R_2|^2 + |S_1|^2 + |S_2|^2) = 0, \tag{14}$$

$$R_1' - \frac{1}{r}KR_1 + \left[\frac{h}{gr}(g^2\mu^2r^2 + H^2)^{1/2} - m - E\right]S_2 + i\frac{1}{2r}JR_2 = 0, \tag{15}$$

$$R_2' - \frac{1}{r}KR_2 - \left[\frac{h}{gr}(g^2\mu^2r^2 + H^2)^{1/2} - m + E\right]S_1 + i\frac{1}{2r}JR_1 = 0, \tag{16}$$

$$S_1' + \frac{1}{r}KS_1 - \left[\frac{h}{gr}(g^2\mu^2r^2 + H^2)^{1/2} - m - E\right]R_2 + i\frac{1}{2r}JS_2 = 0, \tag{17}$$

$$S_2' + \frac{1}{r}KS_2 + \left[\frac{h}{gr}(g^2\mu^2r^2 + H^2)^{1/2} - m + E\right]R_1 + i\frac{1}{2r}JS_1 = 0. \tag{18}$$

在导出上述方程组时，应用了如下一些关系式，它们容易由 χ 的定义式(11)导出．

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{r}\chi = -\boldsymbol{\tau}\cdot\hat{r}\chi, \tag{19}$$

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\tau}\chi = -3\chi, \tag{20}$$

$$\chi^+\sigma^i\tau^a\chi = -2\delta_{ia}, \tag{21}$$

$$\chi^+\sigma^i\tau^a(\boldsymbol{\tau}\cdot\hat{r})\chi = -\chi^+(\boldsymbol{\tau}\cdot\hat{r})\sigma^i\tau^a\chi = -2i\epsilon_{ial}\hat{r}^l \tag{22}$$

$$\chi^+(\boldsymbol{\tau}\cdot\hat{r})\sigma^i\tau^a(\boldsymbol{\tau}\cdot\hat{r})\chi = -4\hat{r}^i\hat{r}^a + 2\delta_{ia}. \tag{23}$$

方程 (12a) 并不是封闭的径向方程．此点意味着双子 Ansatz(8)—(11)是不“完备”的．这一结论与费米子和 Higgs 的直接耦合项是否存在无关．对于 Jackiw-Rebbi 模型[3]，上述结论依然存在1)．要导出封闭的径向方程组，需修改双子 Ansatz，使之具有更复杂的形式（例如，在(8)的第一式中引入比例于 δ_{ai}，$\hat{r}_a\hat{r}_i$ 等的项)．下面，我们不准备讨论这种情形．注意到，如果完全忽略费米子对规范场和 Higgs 场的反作用，则规范场和 Higgs 场完全与费米场退耦，因而可以单独求解规范场和 Higgs 场．然后把它们处理为外势去求解狄拉克方程．这是 Jackiw 和 Rebbi 方法[3]对双子情形的直接推广．这种近似处理是合理的，因为费米场对非常重的双子的影响是很小的．

三、渐　近　解

(i) 无穷远处的渐近行为

对于 Julia-Zee 双子，当 $r\to\infty$ 时，规范场和 Higgs 场的渐近行为是

$$K(r)\underset{r\to\infty}{\longrightarrow}0,\quad J(r)\underset{r\to\infty}{\longrightarrow}Mr + b,\quad H(r)\underset{r\to\infty}{\longrightarrow}\tilde{\beta}\mu r. \tag{24}$$

此处，M 和 b 是任意的实常数，$\tilde{\beta} = 2g^2/\lambda$．利用 (24)，(15)—(18) 化为

$$R_1' = [m + E - h(\mu^2 + \tilde{\beta}^2\mu^2/g^2)^{1/2}]S_2, \tag{25}$$

$$R_2' = [-m + E + h(\mu^2 + \tilde{\beta}^2\mu^2/g^2)^{1/2}]S_1, \tag{26}$$

---

1) 作者非常感谢审稿人，他的审稿意见使我们注意到这个普遍结论．

$$S_1' = [-m - E + h(\mu^2 + \tilde{\beta}^2\mu^2/g^2)^{1/2}]R_2, \tag{27}$$

$$S_2' = [m - E - h(\mu^2 + \tilde{\beta}^2\mu^2/g^2)^{1/2}]R_1. \tag{28}$$

由 (25)—(28) 可得：

$$R_1, S_2 \sim \exp(-\sqrt{\eta_1\eta_2}\, r), \tag{29}$$

$$R_2, S_1 \sim \exp(-\sqrt{\eta_3\eta_4}\, r). \tag{30}$$

此处，$\eta_1 = m + E - h(\mu^2 + \tilde{\beta}^2\mu^2/g^2)^{1/2}$，$\eta_2 = m - E - h(\mu^2 + \tilde{\beta}^2\mu^2/g^2)^{1/2}$，

$$\eta_3 = -m + E + h(\mu^2 + \tilde{\beta}^2\mu^2/g^2)^{1/2},\ \eta_4 = -m - E + h(\mu^2 + \tilde{\beta}^2\mu^2/g^2)^{1/2}. \tag{31}$$

费米子波函数在无穷远处的渐近行为(29)和(30)表明，若 R_i 和 $S_i(i = 1, 2)$ 指数收敛，则 η_1 和 η_2 必须具有相同的符号，η_3 和 η_4 也必须具有相同的符号．这两个条件是彼此协调的．因为由(31)，

(1) 如果 η_1 和 η_2 同时为正，则

$$m > |E| + h(\mu^2 + \tilde{\beta}^2\mu^2/g^2)^{1/2}, \tag{32}$$

利用(32)，η_3 和 η_4 必定同时为负．

(2) 如果 η_1 和 η_2 同时为负，则η_3 和 η_4 必定同时为正．因而(29)和(30)两式将被同时满足．

(ii) 原点附近的行为

对于 Julia-Zee 双子，规范场和 Higgs 场的小 r 行为是

$$K(r) \xrightarrow[r\to 0]{} 1 + ar^2,\ J(r) \xrightarrow[r\to 0]{} br^2,\ H(r) \xrightarrow[r\to 0]{} cr^2. \tag{33}$$

此处，a、b 和 c 是任意实常数．利用(33)，由(15)—(18)可得费米子波函数的小 r 行为如下：

$$R_1(r) \xrightarrow[r\to 0]{} \alpha r - (h\mu - m - E)\delta r^2,\ R_2(r) \xrightarrow[r\to 0]{} \beta r + (h\mu - m + E)\gamma r^2,$$
$$S_1(r) \xrightarrow[r\to 0]{} \gamma r + \frac{1}{3}(h\mu - m - E)\beta r^2,\ S_2(r) \xrightarrow[r\to 0]{} \delta r - \frac{1}{3}(h\mu - m + E)\alpha r^2. \tag{34}$$

四、束缚态的必要条件

利用上面导出的在双子外势中费米子波函数的径向方程组和无穷远处及原点附近的渐近解，可以导出费米子束缚态存在的必要条件的一个不等式．由此可对束缚态是否存在作出某些定性的结论．

由(15)—(18)，可得等式

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dr}(R_1^*S_2 + R_2^*S_1) + E(|R_1|^2 + |R_2|^2 - |S_1|^2 \\ &- |S_2|^2) - m(|R_1|^2 + |S_2|^2 - |S_1|^2 - |R_2|^2) \\ &+ \frac{h}{gr}(g^2\mu^2r^2 + H^2)^{1/2}(|R_1|^2 + |S_2|^2 - |S_1|^2 - |R_2|^2) = 0.\end{aligned} \tag{35}$$

将上式从 0 至∞积分，由于渐近解 (24)、(29)、(30) 和 (33)、(34) 各式，$\int_0^\infty dr\ (R_1^* S_2 + R_2^* S_1) = 0$，且(35)式后三项的积分存在，故(35)式化为：

$$E/m = (A - hB/g)/C, \tag{36}$$

此处，

$$A \equiv \int_0^\infty dr(|R_1|^2 + |S_2|^2 - |S_1|^2 - |R_2|^2), \tag{37}$$

$$B \equiv \frac{1}{m}\int_0^\infty dr\ \frac{1}{r}\ (g^2\mu^2 r^2 + H^2)^{1/2}(|R_1|^2 + |S_2|^2 - |S_1|^2 - |R_2|^2), \tag{38}$$

$$C \equiv \int_0^\infty dr(|R_1|^2 + |R_2|^2 - |S_1|^2 - |S_2|^2). \tag{39}$$

由束缚态条件 (1) 和 (36) 式，得

$$-1 < (A - hB/g)/C < 1. \tag{40}$$

这个不等式是束缚态存在的必要条件．这意味着，若这个不等式不被满足，则必不存在费米子束缚态．

这里，存在四种可能情形．

(I) $C > 0$．此时，(39) 式给出

$$C_1 > C_2. \tag{41}$$

此处，

$$C_1 \equiv \int_0^\infty dr(|R_1|^2 - |S_1|^2),\quad C_2 \equiv \int_0^\infty dr(|S_2|^2 - |R_2|^2). \tag{42}$$

这又有两种情形：

(i) $C > 0$，$B > 0$．

这种情形，不等式(40)化为

$$2C_2/B < h/g < 2C_1/B. \tag{43}$$

(ii) $C > 0$，$B < 0$．

(40) 化为：

$$2C_1/B < h/g < 2C_2/B. \tag{44}$$

容易看出，对于这两种情形，(43)、(44) 与 (41) 相容．

(II) $C < 0$．此时，(39) 式给出

$$C_1 < C_2. \tag{45}$$

(i) $C < 0, B > 0$．

(40) 化为：
$$2C_1/B < h/g < 2C_2/g. \tag{46}$$

(ii) $C < 0$，$B < 0$．

(40) 化为：
$$2C_2/B < h/g < 2C_1/B. \tag{47}$$

容易看出，对于这两种情形，(46)、(47) 也与 (45) 相容．这就是说，对于上述四种可能情形，束缚态存在的必要条件(40)都存立，因而费米子与双子组成束缚系统是可能的．

现再考察当费米子与 Higgs 场之间的直接标量耦合趋于零的情形． 当 $h \to 0$ 时，(40)化为

$$-1 < A/C < 1 \tag{48}$$

这里有两种可能情形：

(i) $C>0$.

(48) 化为：
$$-C<A<C. \tag{49}$$
(49) 等价于 $A-C<0$ 和 $A+C>0$，即
$$C_2<0 \text{ 和 } C_1>0. \tag{50}$$
显然，(50)与(41)相容.

(ii) $C<0$.

(48) 化为：
$$-C>A>C. \tag{51}$$
(51)等价于 $A+C<0$ 和 $A-C>0$，即
$$C_1<0 \text{ 和 } C_2>0. \tag{52}$$
显然，(52)与(45) 相容. 可见，上述两种情形，束缚态存在的必要条件(48)都存立. 这意味着，即使费米子与 Higgs 场之间的直接标量耦合趋于零，费米子与双子组成束缚系统仍然是可能的.

在(12)—(18)中令 $J(r)=0$，即回到费米子-磁单极系统. 此时，R_1 仅仅耦合于 S_2，可令 $R_2=S_1=0$，且 R_1 和 S_2 可取为实函数. 用与导出(36)完全类似的方法，得
$$E/m=(D-hG/g)/F \tag{53}$$
此处，
$$D\equiv\int_0^\infty dr(R_1^2+S_2^2)>0, \tag{54}$$
$$G\equiv\int_0^\infty dr\frac{1}{mr}(g^2\mu^2r^2+H^2)^{1/2}(R_1^2+S_2^2)>0, \tag{55}$$
$$F\equiv\int_0^\infty dr(R_1^2-S_2^2). \tag{56}$$
束缚态存在的必要条件为
$$-1<(D-hG/g)/F<1. \tag{57}$$
由(57)，可对是否存在费米子-磁单极束缚系统作出如下结论：

(I) h 不为零情形. 此时，对于 $F>0$ 和 $F<0$ 两种情形，束缚态存在的必要条件都存立，因而费米子与磁单极组成束缚系统是可能的.

(II) $h\to 0$ 的情形. 此时，由于
$$D/|F|>1, \tag{58}$$
故(57)必不被满足. 这意味着，若费米子与 Higgs 场之间的直接标量耦合趋于零，则费米子与磁单极组成束缚系统是绝不可能的.

总结上面的讨论，我们看到，在费米子的束缚态是否存在方面，双子外势与磁单极外势很不相同. 纯粹磁单极不能束缚费米子. 为了束缚费米子，引入费米子与 Higgs 场之间的直接标量耦合是必要的. 对于双子情形，即使不存在费米子与 Higgs 场之间的直接耦合，束缚态依然可能存在. 这一结果可如下理解. 由于双子“电场” $J(r)$ 的存在，费米子径向波函数 R_i 和 $S_i(i=1,2)$ 并不退耦为不相耦合的两个组，因而没有哪两个函数可以选择为零. 这样，由于 R_2 和 S_1 的存在，在 $h\to 0$ 的情况下，束缚态必要条件也可能被满足. 这意味着，双子可通过其“电场”而束缚费米子，因而即使不引入费米子与 Higgs

场之间的直接耦合，束缚态依然可能存在.

致谢：我们对 H.Joos 教授和 T. F. Walsh 教授在作者访问 DESY 期间所给的热情款待和进行的有益讨论、对 John R. Clem 教授和 Young Bing-lin 教授在作者访问 Iowa State University 期间所给的热情款待和进行的有益讨论表示感谢. 我们还感谢 P.Osland 博士仔细阅读了手稿. 我们还特别感谢审稿人提出的很好的审稿意见.

参　考　文　献

[1] G. 'tHooft, *Nucl. Phys.*, **B79**(1974), 276;
A. Polyakov, *JETP. Lett.*, **20**(1974), 194.
[2] J. H. Swank, L. J. Swank and Tekin Dereli, *Phys. Pev.*, **D12**(1975), 1096.
[3] R. Jackiw and C. Rebbi, *Phys. Rev.*, **D13**(1976), 3398.
[4] 王明中、汪克林、郑希特、冼鼎昌、章正刚，高能物理与核物理，Vol. **2**, (1978), 35.
[5] Li Xinzhou, Wang Kelin and Zhang Jianzu, *Nuov. Cim.*, **A75**(1983), 87.
[6] 李新洲、汪克林、张鉴祖，科学通报，**28**(1983), 1231.
[7] Li Xinzhou, Wang Kelin and Zhang Jianzu, *Nuov. Cim.*, **A80**(1984), 311.
[8] Li Xinzhou, Wang Kelin and Zhang Jianzu, *Phys. Lett.*, **140B** (1984), 209.
[9] B. Julia and A. Zee, *Phys. Rev.*, **D11**(1975), 222.
[10] A. S. Blaser, N. H. Christ and Ju-Fei Tang, *Phys. Rev.*, **D25**(1982), 2128.
[11] C. G. Callen, *Jr. Phys. Rev.*, **D25**(1982), 2141.

BOUND STATE CONDITION OF FERMION AND JULIA-ZEE DYON SYSTEM

WANG KE-LIN
(University of Science and Technology of China)

ZHANG JIAN-ZU
(Shanxi University)

ABSTRACT

A scalar coupling model of $SU(2)$ Higgs and fermion is considered. The main results are: (1) Treating the Julia-Zee dyon as external potential, the equation system of the radial wave functions of the fermions is obtained. (2) The asymptotic solutions at the infinity and the origin are presented. (3) The necessary conditions of the fermion's bound states are qualitatively discussed which shows that for the monopole case when the scalar coupling approaches zero the fermion's bound states do not exist, but for the dyon case when the scalar coupling approaches zero the existence of the bound state is possible.