

色散系统中束流投影发射度的增长

魏开煜

(中国科学院高能物理研究所)

摘 要

本文讨论了传输系统中由于轨道的动量色散而引起的束流投影发射度的增长, 导出了计算横向和纵向投影发射度增长率的公式. 假如 (XOZ) 为偏转平面, 则所导出的投影发射度的增长率为:

$$\frac{\Delta \varepsilon_x}{\varepsilon_{x0}} = \left\{ 1 + \frac{1}{\varepsilon_{x0}} (\gamma_{xf} \eta^2 - 2\alpha_{xf} \eta \eta' + \beta_{xf} \eta'^2) \left(\frac{\Delta P}{P} \right)_{\max}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} - 1; \quad (1)$$

$$\frac{\Delta \varepsilon_z}{\varepsilon_{z0}} = \left\{ 1 + \frac{\varepsilon_{x0}}{\varepsilon_{z0}^2} (\gamma_{xf} \eta^2 - 2\alpha_{xf} \eta \eta' + \beta_{xf} \eta'^2) \left(\frac{\Delta P}{P} \right)_{\max}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} - 1. \quad (2)$$

这里 ε_{x0} 和 ε_{z0} 分别是束流的横向和纵向初始发射度; $\left(\frac{\Delta P}{P} \right)_{\max}$ 是动量散度; $\beta_{xf}, \alpha_{xf}, \gamma_{xf}$ 是系统对 x 方向自由振荡的接收度参数; η 和 η' 是色散函数及其导数.

一、引 言

对于粒子束团(或短脉冲束)的传输, 采用六维相空间 $(x, x', y, y', z, \frac{\Delta P}{P})$ 描述粒子的运动是比较完整的. 其中 x, y 分别是粒子在水平和垂直面内相对于系统中心轨道的横向偏移, x', y' 是相应的偏角. $z = Z - Z_s$, Z 和 Z_s 分别是粒子和束团中心的纵坐标, 坐标轴沿系统的中心轨道. “'”表示对 Z_s 求导数. $\left(\frac{\Delta P}{P} \right)$ 是粒子动量与设计值 P 的相对偏差. 如众所知, 在这样的相空间里, 束流的六维发射度是一个运动常数^[1]. 但是, 它是一个六维超椭球, 是不能直接测量的. 通常只能分别测量它在 (x, x') , (y, y') 和 $(z, \frac{\Delta P}{P})$ 这三个相平面上的投影, 我们把这种投影叫做二维投影发射度, 或者简称为束流的投影发射度.

在无偏转的传输系统中, 束流在三个相平面上的投影发射度也是运动常数. 但是在偏转系统中, 由于轨道动量色散的存在, 偏转平面内的横向运动和纵向运动发生线性耦

本文 1982 年 5 月 12 日收到.

合,就使得相互耦合的两个相平面上的投影发射度不再保持常数。人们早就觉察到这一现象,例如在用六维传输程序^[2,3]进行传输系统的设计时,发现束流在经过偏转磁铁之后发射度变大了。但是,由于对这一现象缺乏分析研究,所以对其变化规律是不清楚的。例如,人们常常提出这样一些问题:(1)由于束流在六维相空间中总的发射度是守恒的,是不是当横向发射度增大时,纵向发射度应当减小?(2)这种发射度的增长是否也像公差引起的增长那样,是不可逆的?(3)这种发射度的增长量究竟有多大?为了弄清楚这些问题,我们对这一现象进行了理论分析,导出了横向和纵向投影发射度增长的分析表达式。并且通过具体的计算例子,说明了在不同情况下这种增长的数量关系。结果表明:色散系统中束流在偏转平面内横向发射度和纵向发射度是同时增长的,而不是一个增大另一个减小;发射度的增长率与束流的初始发射度、动量散度、系统的色散函数以及对横向自由振荡的接收度参数有密切关系。对于一定的初始发射度来说,动量散度和色散函数越大,增长率就越大;当动量散度和色散函数一定时,初始发射度越小增长率也越大。因而,这种发射度的增长并不总是很小的。在初始发射度较小,动量散度和色散函数较大的情况下,增长率可能达到百分之几十甚至更大。但是,这种发射度的增长与公差引起的增长不同,是一种可逆过程,随着轨道色散(包括位置色散与角色散)的完全消除,束流投影发射度的大小会自动地恢复到它的初始值。

二、理论分析

如众所知,在传输过程中束流特性矩阵 σ 的转换式为^[1,4]:

$$\sigma = M\sigma_0M^T. \quad (2.1)$$

这里 σ_0 是束流的初始特性矩阵, M 是系统由初始点到计算点的装配矩阵, M^T 是 M 的转置矩阵。在线性情况下,假如由我们所取的初始点到计算点之间这段传输系统中只包括漂移节、四极透镜等非偏转元件,那么,六维装配矩阵 M 就具有以下形式:

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_{21} & M_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{33} & M_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{43} & M_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & M_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

并且有

$$|M| = 1, \quad \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} M_{33} & M_{34} \\ M_{43} & M_{44} \end{vmatrix} = 1. \quad (2.3)$$

这里 $|M|$ 表示 M 矩阵的行列式值,余类推。

假如由我们所取的初始点到计算点之间包括有偏转磁铁或静电偏转器等偏转元件,我们假定偏转平面是(XOZ),那么,装配矩阵 M 将具有以下形式:

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & 0 & 0 & 0 & M_{16} \\ M_{21} & M_{22} & 0 & 0 & 0 & M_{26} \\ 0 & 0 & M_{33} & M_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{43} & M_{44} & 0 & 0 \\ M_{51} & M_{52} & 0 & 0 & 1 & M_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

矩阵 (2.4) 及其子矩阵仍然满足关系式 (2.3). 另外, M_{26} 和 M_{16} , M_{51} 和 M_{52} 之间满足以下关系式:

$$M_{26} = M'_{16}, \quad M_{51} = M'_{52}. \quad (2.5)$$

由于以上各关系式不难证明, 所以这里不讲推导过程.

我们首先讨论在所取的传输段含有偏转元件的情况. 在此情况下, 我们假定束流在初始点为无色散束, 它的特性矩阵 σ_0 具有对称性

$$\sigma_{0ij} = \sigma_{0ji}, \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, 6. \quad (2.6)$$

并且

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} \sigma_{011} & \sigma_{012} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{012} & \sigma_{022} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{033} & \sigma_{034} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{034} & \sigma_{044} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{055} & \sigma_{056} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{056} & \sigma_{066} \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

由 (2.4) 式求得 M 的转置矩阵 M^T , 然后将它们和 (2.7) 式一同代入 (2.1) 式, 就可以求得 σ 矩阵各元素的表示式如下:

$$\sigma_{11} = M_{11}^2 \sigma_{011} + 2M_{11}M_{12} \sigma_{012} + M_{12}^2 \sigma_{022} + M_{16}^2 \sigma_{066}, \quad (2.8)$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = M_{21}M_{11} \sigma_{011} + (M_{12}M_{21} + M_{11}M_{22}) \sigma_{012} + M_{12}M_{22} \sigma_{022} + M_{16}M_{26} \sigma_{066}, \quad (2.9)$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{31} = 0, \quad \sigma_{14} = \sigma_{41} = 0, \quad (2.10)$$

$$\sigma_{15} = \sigma_{51} = M_{11}M_{51} \sigma_{011} + (M_{12}M_{51} + M_{11}M_{52}) \sigma_{012} + M_{12}M_{52} \sigma_{022} + M_{16} \sigma_{056} + M_{16}M_{56} \sigma_{066}, \quad (2.11)$$

$$\sigma_{16} = \sigma_{61} = M_{16} \sigma_{066} \quad (2.12)$$

$$\sigma_{22} = M_{21}^2 \sigma_{011} + 2M_{22}M_{21} \sigma_{012} + M_{22}^2 \sigma_{022} + M_{26}^2 \sigma_{066}, \quad (2.13)$$

$$\sigma_{23} = \sigma_{32} = 0, \quad \sigma_{24} = \sigma_{42} = 0, \quad (2.14)$$

$$\sigma_{25} = \sigma_{52} = M_{21}M_{51} \sigma_{011} + (M_{22}M_{51} + M_{21}M_{52}) \sigma_{012} + M_{22}M_{52} \sigma_{022} + M_{26} \sigma_{056} + M_{26}M_{56} \sigma_{066}, \quad (2.15)$$

$$\sigma_{26} = \sigma_{62} = M_{26} \sigma_{066}, \quad (2.16)$$

$$\sigma_{33} = M_{33}^2 \sigma_{033} + 2M_{33}M_{34} \sigma_{034} + M_{34}^2 \sigma_{044}, \quad (2.17)$$

$$\sigma_{34} = \sigma_{43} = M_{33}M_{43} \sigma_{033} + (M_{34}M_{43} + M_{33}M_{44}) \sigma_{034} + M_{34}M_{44} \sigma_{044}, \quad (2.18)$$

$$\sigma_{35} = \sigma_{53} = 0, \quad \sigma_{36} = \sigma_{63} = 0, \quad (2.19)$$

$$\sigma_{44} = M_{43}^2 \sigma_{033} + 2M_{44}M_{43}\sigma_{034} + M_{44}^2 \sigma_{044}, \quad (2.20)$$

$$\sigma_{45} = \sigma_{54} = 0, \quad \sigma_{46} = \sigma_{64} = 0, \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{55} = & M_{51}^2 \sigma_{011} + 2M_{51}M_{52}\sigma_{012} + M_{52}^2 \sigma_{022} + \sigma_{055} \\ & + 2M_{56}\sigma_{056} + M_{56}^2 \sigma_{066}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\sigma_{56} = \sigma_{65} = \sigma_{056} + M_{56}^2 \sigma_{066}, \quad (2.23)$$

$$\sigma_{66} = \sigma_{066}. \quad (2.24)$$

在我们所取的相空间中, 矩阵元 σ_{66} 是束流动量散度的平方:

$$\sigma_{66} = \left(\frac{\Delta P}{P} \right)_{\max}^2, \quad (2.25)$$

因此, (2.24) 式表示束流在传输中动量散度不变, 亦即:

$$\left(\frac{\Delta P}{P} \right)_{\max} = \left(\frac{\Delta P}{P} \right)_{0\max} = \text{常数}. \quad (2.26)$$

这个动量散度引起的束流轨道色散 x_{Pm} 和角色散 x'_{Pm} 分别为

$$x_{Pm} = \eta \left(\frac{\Delta P}{P} \right)_{\max} = M_{16} \sqrt{\sigma_{066}}, \quad (2.27)$$

$$x'_{Pm} = \eta' \left(\frac{\Delta P}{P} \right)_{\max} = M_{26} \sqrt{\sigma_{066}}. \quad (2.28)$$

这里 $\eta = M_{16}$ 为系统的色散函数, $\eta' = M_{26}$ 是色散函数的导数. 由表示式 (2.8), (2.9) 和 (2.13) 可以看出, 矩阵元 σ_{11} , σ_{12} 和 σ_{22} 是由两部分构成的:

$$\sigma_{11} = \sigma_{f11} + x_{Pm}^2, \quad (2.29)$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{f12} + x_{Pm} x'_{Pm}, \quad (2.30)$$

$$\sigma_{22} = \sigma_{f22} + x_{Pm}^2. \quad (2.31)$$

其中 σ_{f11} , σ_{f12} 和 σ_{f22} 是粒子自由振荡的贡献. 它们是:

$$\sigma_{f11} = M_{11}^2 \sigma_{011} + 2M_{11}M_{12}\sigma_{012} + M_{12}^2 \sigma_{022}, \quad (2.32)$$

$$\sigma_{f12} = M_{11}M_{12}\sigma_{011} + (M_{11}M_{22} + M_{12}M_{21})\sigma_{012} + M_{12}M_{22}\sigma_{022}, \quad (2.33)$$

$$\sigma_{f22} = M_{21}^2 \sigma_{011} + 2M_{22}M_{21}\sigma_{012} + M_{22}^2 \sigma_{022}. \quad (2.34)$$

我们分别以 a_{xf} , θ_{xf} 和 ε_{xf} 表示 x 方向粒子自由振荡所产生的包络、散角和发射度; a_x , θ_x 和 ε_x 表示束流在 x 方向的有效包络、散角和投影发射度. 那么有

$$\sigma_{f11} = a_{xf}^2, \quad \sigma_{11} = a_x^2. \quad (2.35)$$

$$\sigma_{f22} = \theta_{xf}^2, \quad \sigma_{22} = \theta_x^2. \quad (2.36)$$

$$\sigma_{f11}\sigma_{f22} - \sigma_{f12}^2 = \varepsilon_{xf}^2, \quad (2.37)$$

$$\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2 = \varepsilon_x^2. \quad (2.38)$$

分别将 (2.35) 和 (2.36) 代入 (2.29) 和 (2.31) 可以得到:

$$a_x^2 = a_{xf}^2 + x_{Pm}^2, \quad (2.39)$$

$$\theta_x^2 = \theta_{xf}^2 + x_{Pm}^2. \quad (2.40)$$

这两个关系式说明: 色散束流有效包络的平方等于自由振荡包络与轨道色散的平方和; 有效散角的平方等于自由振荡散角与角色散的平方和.

将表示式 (2.32)–(2.34) 代入 (2.37) 就可以证明自由振荡所产生的部分发射度 ε_{xf} 仍

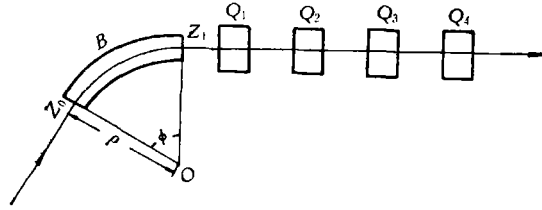


图 1

然是一个运动常数:

$$\varepsilon_{xj}^2 = \sigma_{011}\sigma_{022} - \sigma_{012}^2 = \varepsilon_{x0}^2 = \text{常数}. \quad (2.41)$$

这里 ε_{x0} 是束流进入偏转系统时在 x 方向的初始发射度. 我们在前面已经假定了束流的初始状态是无色散的. 将表示式 (2.29)–(2.31) 代入 (2.38) 并注意运用关系式 (2.37) 和 (2.41) 就可以求得束流在 x 方向的投影发射度的平方为:

$$\varepsilon_x^2 = \varepsilon_{x0}^2 + \sigma_{f22}x_{Pm}^2 + \sigma_{f11}x_{Pm}'^2 - 2\sigma_{f12}x_{Pm}x_{Pm}'. \quad (2.42)$$

在束流的发射度同系统的接收度相匹配的情况下, 我们有: $\sigma_{f11} = \varepsilon_{x0}\beta_{xf}$, $\sigma_{f12} = \varepsilon_{x0}\alpha_{xf}$, $\sigma_{f22} = \varepsilon_{x0}\gamma_{xf}$, 这里 β_{xf} , α_{xf} , γ_{xf} 是系统对自由振荡的接收度参数. 将这些关系代入 (2.42) 式就可以求得 x 方向的投影发射度为:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{x0} \left\{ 1 + \frac{1}{\varepsilon_{x0}} (\gamma_{xf}\eta^2 - 2\alpha_{xf}\eta\eta' + \beta_{xf}\eta'^2) \left(\frac{\Delta P}{P} \right)_{\max}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (2.43)$$

投影发射度的增长系数为

$$\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_{x0}} = \left\{ 1 + \frac{1}{\varepsilon_{x0}} (\gamma_{xf}\eta^2 - 2\alpha_{xf}\eta\eta' + \beta_{xf}\eta'^2) \left(\frac{\Delta P}{P} \right)_{\max}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (2.44)$$

增量 $\Delta\varepsilon_x = \varepsilon_x - \varepsilon_{x0}$ 同初始发射度 ε_{x0} 的比值定义为发射度的增长率, 它的表示式为:

$$\frac{\Delta\varepsilon_x}{\varepsilon_{x0}} = \left\{ 1 + \frac{1}{\varepsilon_{x0}} (\gamma_{xf}\eta^2 - 2\alpha_{xf}\eta\eta' + \beta_{xf}\eta'^2) \left(\frac{\Delta P}{P} \right)_{\max}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} - 1. \quad (2.45)$$

我们考虑束流通过一个最简单的偏转系统, 它是由一块偏转磁铁 B 和它后面的一系列透镜构成的, 如图 1 所示. 我们以 Z_0 和 Z_1 分别表示偏转磁铁入口和出口的纵坐标. 假如我们以 Z_0 为系统的初始点, 这就是一个包含偏转元件的传输段, 束流在 Z_0 处的初始发射度为 ε_{x0} , 当它经过偏转磁铁 B 而到达 Z_1 时, 投影发射度变为 ε_{x1} , 根据公式 (2.43) 有:

$$\varepsilon_{x1} = \varepsilon_{x0} \left\{ 1 + \frac{1}{\varepsilon_{x0}} (\gamma_{x1}\eta_1^2 - 2\alpha_{x1}\eta_1\eta_1' + \beta_{x1}\eta_1'^2) \left(\frac{\Delta P}{P} \right)_{\max}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (2.46)$$

但是, 当我们把 Z_1 当做初始点, 而把 ε_{x1} 当做束流的初始发射度计算后面的传输段时, 就是一个无偏转元件的系统, 于是装配矩阵就具有 (2.2) 式所表示的形式. 如众所知, 在这种情况下, 投影发射度也是运动常数, 亦即

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{x1} = \text{常数}, \quad \text{当 } Z \geq Z_1. \quad (2.47)$$

对于同一个传输系统和同一个束流, 选取不同的初始点进行描述应当得到相同的结果. 因此, 在 $Z \geq Z_1$ 区域中的任一点, 公式 (2.47) 中的 ε_x 与 (2.43) 中的相同. 将 (2.43) 和

(2.46) 代入 (2.47) 就可以得到:

$$\gamma_x \eta^2 - 2\alpha_x \eta \eta' + \beta_x \eta'^2 = \gamma_{x/l} \eta_1^2 - 2\alpha_{x/l} \eta_1 \eta_1' + \beta_{x/l} \eta_1'^2 = \text{常数}, \quad \text{当 } Z \geq Z_1. \quad (2.48)$$

这样一来,我们就得到了一个结论:束流的投影发射度只是在偏转磁铁(或其他偏转元件)中才发生变化,在偏转磁铁以外保持常数,这个常数值的大小与束流通过的偏转磁铁的参数有关.同这个结论相对应,由(2.48)式所表示的物理量也只是在偏转磁铁中才发生变化,在偏转磁铁以外是一个不变量.

利用前面所导出的 σ_{55} , σ_{56} 和 σ_{66} 的表示式可以求得束团的纵向投影发射度 ε_z 为:

$$\varepsilon_z = \varepsilon_{z0} \left\{ 1 + \frac{\varepsilon_{x0}}{\varepsilon_{z0}^2} (\gamma_{x/0} \zeta^2 + 2\alpha_{x/0} \zeta \zeta' + \beta_{x/0} \zeta'^2) \left(\frac{\Delta P}{P} \right)_{\max}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (2.49)$$

其中 $\gamma_{x/0}$, $\alpha_{x/0}$ 和 $\beta_{x/0}$ 依次是 $\gamma_{x/l}$, $\alpha_{x/l}$ 和 $\beta_{x/l}$ 的初始值; $\zeta = M_{52}$, $\zeta' = M_{51}$.

用同样的方法也可以证明 ε_z 只是在偏转磁铁中才发生变化,在偏转磁铁以外是运动常数,亦即:

$$\varepsilon_z = \varepsilon_{z1} = \text{常数}, \quad \text{当 } Z \geq Z_1. \quad (2.50)$$

与此相对应有:

$$\gamma_{x/0} \zeta^2 + 2\alpha_{x/0} \zeta \zeta' + \beta_{x/0} \zeta'^2 = \gamma_{x/0} \zeta_1^2 + 2\alpha_{x/0} \zeta_1 \zeta_1' + \beta_{x/0} \zeta_1'^2 = \text{常数}, \quad \text{当 } Z \geq Z_1. \quad (2.51)$$

由于物理量 (2.48) 和 (2.51) 都只是在偏转磁铁中才发生变化,而在偏转磁铁以外保持常数,因而,它们之间必有一定关系.将 (2.32)–(2.34) 式的等号两边除以 ε_{x0} , 可以得到:

$$\beta_{x/l} = M_{11}^2 \beta_{x/0} + 2M_{11}M_{12} \alpha_{x/0} + M_{12}^2 \gamma_{x/0}, \quad (2.52)$$

$$\alpha_{x/l} = M_{11}M_{12} \beta_{x/0} + (M_{11}M_{22} + M_{12}M_{21}) \alpha_{x/0} + M_{12}M_{22} \gamma_{x/0}, \quad (2.53)$$

$$\gamma_{x/l} = M_{21}^2 \beta_{x/0} + 2M_{22}M_{21} \alpha_{x/0} + M_{22}^2 \gamma_{x/0}. \quad (2.54)$$

假定偏转磁铁的场是均匀的,中心轨道的偏转半径是 ρ , 那么,由磁铁入口 z_0 到磁铁中任意位置 Z 的 M 矩阵元为:

$$M_{11} = M_{22} = \cos \frac{Z - Z_0}{\rho}, \quad (2.55)$$

$$M_{12} = \rho \sin \frac{Z - Z_0}{\rho}, \quad (2.56)$$

$$M_{21} = -\frac{1}{\rho} \sin \frac{Z - Z_0}{\rho}, \quad (2.57)$$

$$\eta = M_{16} = \rho \left(1 - \cos \frac{Z - Z_0}{\rho} \right), \quad (2.58)$$

$$\eta' = M_{26} = \sin \frac{Z - Z_0}{\rho}, \quad (2.59)$$

$$\zeta' = M_{51} = -\sin \frac{Z - Z_0}{\rho}, \quad (2.60)$$

$$\zeta = M_{52} = -\rho \left(1 - \cos \frac{Z - Z_0}{\rho} \right). \quad (2.61)$$

利用关系式 (2.52)–(2.61) 很容易证明

$$\gamma_x \eta^2 - 2\alpha_x \eta \eta' + \beta_x \eta'^2 = \gamma_{x/0} \zeta^2 + 2\alpha_{x/0} \zeta \zeta' + \beta_{x/0} \zeta'^2. \quad (2.62)$$

这样一来,我们就可以将纵向投影发射度的表示式(2.49)改写为:

$$\varepsilon_z = \varepsilon_{z0} \left\{ 1 + \frac{\varepsilon_{x0}}{\varepsilon_{z0}^2} (\gamma_{x'}\eta^2 - 2\alpha_{x'}\eta\eta' + \beta_{x'}\eta'^2) \left(\frac{\Delta P}{P} \right)_{\max}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (2.63)$$

由此得到 ε_x 的增长系数为:

$$\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_{x0}} = \left\{ 1 + \frac{\varepsilon_{x0}}{\varepsilon_{z0}^2} (\gamma_{x'}\eta^2 - 2\alpha_{x'}\eta\eta' + \beta_{x'}\eta'^2) \left(\frac{\Delta P}{P} \right)_{\max}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (2.64)$$

增长率为:

$$\frac{\Delta\varepsilon_x}{\varepsilon_{x0}} = \left\{ 1 + \frac{\varepsilon_{x0}}{\varepsilon_{z0}^2} (\gamma_{x'}\eta^2 - 2\alpha_{x'}\eta\eta' + \beta_{x'}\eta'^2) \left(\frac{\Delta P}{P} \right)_{\max}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} - 1. \quad (2.65)$$

由上面所导出的公式可以看出,当轨道色散和角色散被完全消除时,亦即当 $\eta = 0$, $\eta' = 0$ 时,又重新回到 $\varepsilon_x = \varepsilon_{x0}$, $\varepsilon_z = \varepsilon_{z0}$, 这就是说,色散引起的投影发射度增长是可逆的.

由 σ_{33} , σ_{34} 和 σ_{44} 的表示式可以证明束流在非偏转平面 (YOZ) 上的横向发射度 ε_y 仍然是运动常数;利用(2.1)式和 $|M| = 1$ 的性质也可以证明 $|\sigma| = |\sigma_0| = \text{常数}$,亦即束流的六维发射度也保持常数.束流在 (x, x') , $(z, \frac{\Delta P}{P})$ 平面上的投影发射度同时增长与六维发射度守恒之间没有矛盾,因为一个体积一定的椭球,当它变为不同的形状时有不同的表面积,因此它在三个坐标面上的投影面积之和也是可大可小的,不一定保持常数.

三、计算结果

我们分别用六维传输程序《TR(1)》^[3] 和本文所导出的分析公式,对能量为 35.5MeV 的质子束团通过偏转系统时的投影发射度增长进行了计算.所取束流的初始发射度为 $\varepsilon_{x0} = 2.52135 \times 10^{-3}$ 厘米·弧度, $\beta_{x'0} = 396.62$ 厘米, $\alpha_{x'0} = 0$, $\gamma_{x'0} = 2.52135 \times 10^{-3}(\text{厘米})^{-1}$; $\varepsilon_{z0} = 3.2587 \times 10^{-3}$ 厘米·弧度, $\left(\frac{\Delta P}{P} \right)_{\max} = \pm 0.3583\%$.这相当于束流在 x 方向的初始状态是半包络等于 1 厘米的束腰,束团的纵向半长度约为 0.91 厘米.在这些束流参数下进行了以下的计算:

(一) 投影发射度增长系数和增长率的计算

假定偏转半径 $\rho = 53$ 厘米,计算了束流通过偏转角不同的磁铁时投影发射度的增长情况,计算所得到的 $\Delta\varepsilon_x/\varepsilon_{x0}$ 和 $\Delta\varepsilon_z/\varepsilon_{z0}$ 曲线如图 2.为了清楚起见,我们在表 1 中列出了几个典型偏转角时的精确数据.由这些数据可以看出,这种投影发射度的增长率可能达到百分之几十甚至更大(对于更大的偏转角).

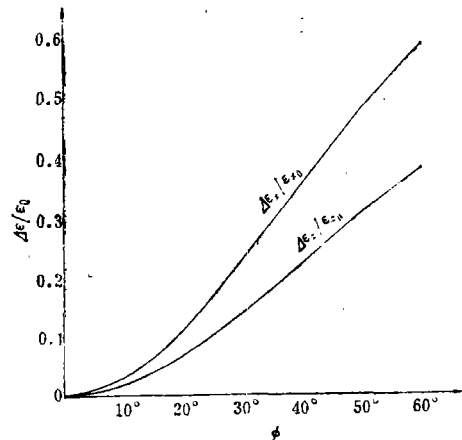


图 2 投影发射率增长率与偏转角的关系

表1 几个典型偏转角相应的增长系数和增长率

偏转角 ϕ	$\frac{\epsilon_x}{\epsilon_{x0}}$	$\frac{\Delta\epsilon_x}{\epsilon_{x0}}$ (%)	$\frac{\epsilon_x}{\epsilon_{x0}}$	$\frac{\Delta\epsilon_x}{\epsilon_{x0}}$ (%)
15°	1.0655	6.55	1.0398	3.98
30°	1.2268	22.68	1.1413	14.13
45°	1.4187	41.87	1.2674	26.74
60°	1.5886	58.86	1.3828	38.28

表2 分析公式与《TR(1)》程序计算数据比较

偏转角 ϕ	ϵ_x^2 , (厘米·弧度) ²		ϵ_z^2 , (厘米·弧度) ²	
	分析公式计算结果	《TR(1)》计算结果	分析公式计算结果	《TR(1)》计算结果
29°37'	0.949695×10^{-3}	0.949641×10^{-3}	0.137584×10^{-4}	0.137585×10^{-4}
45°	0.127960×10^{-4}	0.127958×10^{-4}	0.170577×10^{-4}	0.170580×10^{-4}
60°	0.160432×10^{-4}	0.160429×10^{-4}	0.203049×10^{-4}	0.203051×10^{-4}

(二) 分析公式与《TR(1)》程序计算结果的比较

我们将本文所导分析公式的计算结果同《TR(1)》程序在数值电子计算机上所得到的结果进行了比较,由于 ϵ_x^2 (或 ϵ_z^2) 的计算误差要比 ϵ_x (或 ϵ_z) 的误差大一倍,所以我们拿两种方法所得到的 ϵ_x^2 和 ϵ_z^2 来进行比较,几个不同偏转角时的比较数据列在表2中。由这些数据可以看出,两种方法所得到的结果复合得非常好。

(三) 消色散系统中投影发射度增长和恢复过程的计算

我们用程序《TR(1)》计算了束流通过消色散系统时投影发射度增长与恢复的全过程。例如一个由两块 60° 偏转磁铁和三个四极透镜构成的对称消色散系统 (如图 3(a)), 透镜的有效长度为 24 厘米, 漂移节长度为 $L_1 = 341.64$ 厘米, $L_2 = 41.64$ 厘米; 聚焦透镜 Q_F 和散焦透镜 Q_D 的磁场梯度在满足消色散条件时分别为 209.53 高斯/厘米和 187.77 高斯/厘米。计算所得投影发射度增长率的曲线如图 3(b)。在第一块偏转磁铁中随着色散的产生和增大, 横向和纵向投影发射度 ϵ_x 和 ϵ_z 都开始增长, 到偏转磁铁出口增加到最大值, 这时 $\Delta\epsilon_x/\epsilon_{x0} = 58.86\%$, $\Delta\epsilon_z/\epsilon_{z0} = 38.28\%$, 然后, 在两块偏转磁铁之间的透镜系统中保持常数, 亦即曲线形成一个平顶。在进入第二块偏转磁铁时, 随着色散的减小, ϵ_x 和 ϵ_z 逐渐恢复, 因而 $\Delta\epsilon_x/\epsilon_{x0}$ 和 $\Delta\epsilon_z/\epsilon_{z0}$ 也逐渐减小, 当到达磁铁出口时, 色散完全消除, ϵ_x 和 ϵ_z 分别恢复到初始值 ϵ_{x0} 和 ϵ_{z0} , 于是 $\Delta\epsilon_x/\epsilon_{x0}$ 和 $\Delta\epsilon_z/\epsilon_{z0}$ 下降到零。

我们还计算了不同透镜数目的反对称消色散系统, 所得到的投影发射度的变化规律

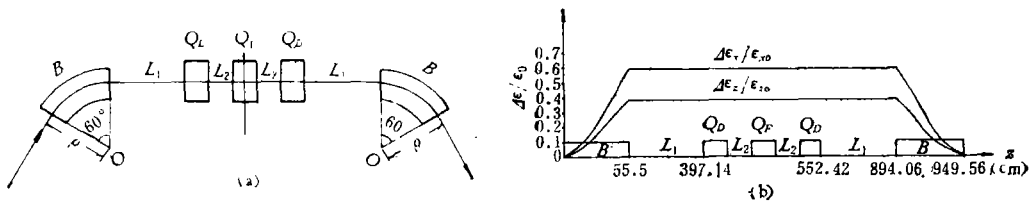


图3 消色散系统中投影发射度变化过程

都是同本文的分析结论相一致的。

束流的这种投影发射度增长对于传输系统的设计是有实际意义的。尤其是对于偏转角度较大的色散或消色散系统, 横向投影发射度的增长将导致束流有效包络的显著增大, 为了减小有效包络, 就需要增加透镜, 这样一来, 系统的造价就会上升。

参 考 文 献

- [1] K. L. Brown, **SLAC-75** (1972).
- [2] K. L. Brown, et. al. **CERN-73-16** (1973).
- [3] 魏开煜、陈伯飞等, 束流运输系统计算程序 «TR(1)» 汇编, 中国科学院高能物理研究所 (1979).
- [4] 魏开煜, 带电束流传输理论, 北京电机工程学会 (1980).

INCREASE OF BEAM PROJECTIVE EMITTANCE IN SYSTEM WITH DISPERSION

WEI KAI-YU

(*Institute of High Energy Physics, Academia sinica*)

ABSTRACT

In this paper, the increase of beam projective emittance caused by the momentum dispersion in the transport systems is discussed, and the incrementary ratio is derived. If the bending plane is (XOZ), the incrementary ratio of the transversal emittance is

$$\frac{\Delta \varepsilon_x}{\varepsilon_{x0}} = \left\{ 1 + \frac{1}{\varepsilon_{x0}} (\gamma_{xf} \eta^2 - 2\alpha_{xf} \eta \eta' + \beta_{xf} \eta'^2) \left(\frac{\Delta P}{P} \right)_{\max}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} - 1, \quad (1)$$

and the longitudinal one is

$$\frac{\Delta \varepsilon_z}{\varepsilon_{z0}} = \left\{ 1 + \frac{\varepsilon_{x0}}{\varepsilon_{z0}^2} (\gamma_{xf} \eta^2 - 2\alpha_{xf} \eta \eta' + \beta_{xf} \eta'^2) \left(\frac{\Delta P}{P} \right)_{\max}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} - 1. \quad (2)$$

Here ε_{x0} and ε_{z0} are original emittances in the x-direction and z-direction respectively, $\left(\frac{\Delta P}{P} \right)_{\max}$ is beam momentum spread β_{xf} , α_{xf} , γ_{xf} being acceptance parameters of the system in x-direction for betatron oscillations, η and η' are dispersion function and its derivative.