

Glauber 理论的精确展开和 硬球近似的比较

谭振强 蒋贻安 陈可中

李清润

(广西大学)

(中国科学院高能物理研究所)

摘 要

本文研究了在高能量下两个少数粒子体系间进行散射时, Glauber 的精确展开与硬球近似展开的比较. 计算结果表明, 在一般情况下, 硬球近似是 Glauber 公式的一个好的近似.

一、引 言

研究中高能强子被原子核散射的问题时, Glauber 理论已被证明是一种简单而有效的理论工具^[1-3]. 当入射粒子不是一个简单的无结构粒子而是一个复杂粒子(例如原子核), 可以把 Glauber 理论直接推广到这种情况, 而得到一个形式上并不复杂的散射振幅公式^[4]:

$$F_{A_1 A_2}(q) = \frac{iK}{2\pi} \int d^2b e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{b}} \langle n | 1 - \prod_{i=1}^{A_1} \prod_{j=1}^{A_2} [1 - T(\mathbf{b} + \mathbf{s}_i - \mathbf{s}'_j)] | 0 \rangle. \quad (1)$$

但是, 这一公式形式上简单, 而实际计算却十分复杂. 当 A_1 和 A_2 都很大时, 可用“光学极限近似”去近似上式^[4]. 但当 A_1 和 A_2 不太大时, 光学极限近似已被证明是不好的近似^{[4][5]}. 在这种情况下, 可使用“硬球近似”方法计算两个复杂粒子间的散射振幅. Alkhozov 等人使用硬球近似去计算 ^4He 被 Ca 的散射截面, 得到了与实验数据符合的角分布曲线^[5]. 但这并不足以说明硬球近似是完全 Glauber 公式(即(1)式)的一个好的近似.

本文的目的即在于研究硬球近似是否是精确 Glauber 公式(1)的一个好的近似.

本文的第二节将给出精确 Glauber 展开和硬球近似下的具体表达式. 第三节给出计算结果并加以讨论.

二、复杂粒子间散射的精确 Glauber 展开式与 硬球近似的展开式

当讨论两个原子核 A_1 和 A_2 间的弹性散射问题时, 散射振幅的完全 Glauber 表示式

为:

$$F_{A_1 A_2}^s(q) = \frac{iK}{2\pi} \int d^2b e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{b}} \left\langle \phi_{A_1} \phi_{A_2} \left| 1 - \prod_{i=1}^{A_1} \prod_{j=1}^{A_2} [1 - \Gamma(\mathbf{b} + \mathbf{s}_i - \mathbf{s}'_j)] \right| \phi_{A_1} \phi_{A_2} \right\rangle, \quad (2)$$

其中 $\phi_{A_1}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_{A_1})$ 和 $\phi_{A_2}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_{A_2})$ 分别是核 A_1 和核 A_2 的基态波函数; \mathbf{s}_i 和 \mathbf{s}'_j 分别是 A_1 中第 i 个核子和 A_2 中第 j 个核子坐标 (相对于它们所在的原子核的质心) 在与入射方向垂直平面上的投影; \mathbf{b} 是核 A_1 和 A_2 质心间距离在同一平面上的投影. \mathbf{K} 是入射核的动量, \mathbf{q} 是入射核的动量转移. $\Gamma(\mathbf{b})$ 是两个核子间散射的剖面函数, 它是由核子-核子散射振幅决定:

$$\Gamma(\mathbf{b}) = \frac{1}{2\pi i K_N} \int d^2q e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{b}} f(q), \quad (3)$$

K_N 是入射核子的动量, $f(q)$ 是核子-核子间散射振幅, 它通常取参数化的形式^[6]:

$$f(q) = \frac{K_N \sigma}{4\pi} (i + \rho) e^{-\beta^2 q^2 / \lambda}, \quad (4)$$

σ 是核子间散射的总截面, ρ 和 β 是参量. 公式(2)形式上简单, 但实际计算十分复杂, 即使原子核的波函数 ϕ_{A_1} 和 ϕ_{A_2} 采用最简单的高斯型密度乘积的形式, (2)式的计算也不简单. 当 A_1 和 A_2 增加时, (2)式的计算就变得越来越复杂.

由于精确的 Glauber 展开((2)式)的复杂性, 因此当计算核-核散射时, 常使用所谓“硬球近似”, 而得到一个计算相对简单些的公式, 这时的散射振幅可表示为:

$$F_{A_1 A_2}^R(q) = \frac{iK}{2\pi} \int d^2b e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{b}} \left\langle \phi_{A_1} \left\{ 1 - \prod_{i=1}^{A_1} \left\langle \phi_{A_2} \left| \prod_{j=1}^{A_2} [1 - \Gamma(\mathbf{b} + \mathbf{s}_i - \mathbf{s}'_j)] \right| \phi_{A_2} \right\rangle \right\} \right| \phi_{A_1} \right\rangle. \quad (5)$$

近似公式(5)可以通过如下的方法得到. 我们知道, 精确的 Glauber 振幅如(2)式所示. 当原子核的波函数 ϕ_{A_1} , ϕ_{A_2} 选用独立粒子波函数时, 便发生质心运动的修正问题. 如使用的波函数为谐振子波函数 (本文的波函数即属此类), 质心的修正十分简单, 即在(2)式的振幅上, 乘以因子

$$\Theta(q) = \exp \left[\left(\frac{R_{A_1}^2}{4A_1} + \frac{R_{A_2}^2}{4A_2} \right) q^2 \right]$$

式中 R_{A_1} , R_{A_2} 为核半径. 考虑质心修正后, 则得到

$$\begin{aligned} F_{A_1 A_2}^s(q) &= \Theta(q) \frac{iK}{2\pi} \int d^2b e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{b}} \left\langle \phi_{A_1} \phi_{A_2} \left| 1 - \prod_{i=1}^{A_1} \prod_{j=1}^{A_2} [1 - \Gamma(\mathbf{b} + \mathbf{s}_i - \mathbf{s}'_j)] \right| \phi_{A_1} \phi_{A_2} \right\rangle \\ &= \Theta(q) \frac{iK}{2\pi} \int d^2b e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{b}} \left\{ 1 - \left\langle \phi_{A_1} \phi_{A_2} \left| \prod_{i=1}^{A_1} \prod_{j=1}^{A_2} [1 - \Gamma_{ij}] \right| \phi_{A_1} \phi_{A_2} \right\rangle \right\}, \quad (6) \end{aligned}$$

这里 $\Gamma_{ij} = \Gamma(\mathbf{b} + \mathbf{s}_i - \mathbf{s}'_j)$. (6)式花括号中的量写成

$$\left\langle \phi_{A_1} \phi_{A_2} \left| \prod_{i=1}^{A_1} \prod_{j=1}^{A_2} (1 - \Gamma_{ij}) \right| \phi_{A_1} \phi_{A_2} \right\rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \langle \phi_{A_1} | \langle \phi_{A_2} | \left\{ \prod_{j=1}^{A_2} (1 - \Gamma_{ij}) \right\} \left\{ \prod_{j=1}^{A_2} (1 - \Gamma_{2j}) \right\} \cdots \left\{ \prod_{j=1}^{A_2} (1 - \Gamma_{A_1 j}) \right\} | \phi_{A_2} \rangle | \phi_{A_1} \rangle \\
&= \langle \phi_{A_1} | \langle \phi_{A_2} | \left\{ \prod_{j=1}^{A_2} (1 - \Gamma_{ij}) \right\} \left(\sum_n |n\rangle_{A_2 A_2} \langle n| \right) \left\{ \prod_{j=1}^{A_2} (1 - \Gamma_{2j}) \right\} \left(\sum_n |n\rangle_{A_1 A_1} \langle n| \right) \cdots \\
&\quad \cdots \left(\sum_n |n\rangle_{A_1 A_1} \langle n| \right) \left\{ \prod_{j=1}^{A_2} (1 - \Gamma_{A_1 j}) \right\} | \phi_{A_2} \rangle | \phi_{A_1} \rangle, \quad (7)
\end{aligned}$$

其中 $\sum_n |n\rangle_{A_1 A_1} \langle n| = 1$ 是对 A_2 核的态求和。下面作近似, 假定 A_2 核是“硬”的, 不能激发, 只处在基态, 即所谓“硬球”近似, 有

$$\sum_n |n\rangle_{A_1 A_1} \langle n| \simeq | \phi_{A_1} \rangle \langle \phi_{A_1} |$$

(7)式变为

$$\begin{aligned}
&\langle \phi_{A_1} \phi_{A_2} | \prod_{i=1}^{A_1} \prod_{j=1}^{A_2} (1 - \Gamma_{ij}) | \phi_{A_1} \phi_{A_2} \rangle \\
&\simeq \langle \phi_{A_1} | \prod_{i=1}^{A_1} \langle \phi_{A_2} | \prod_{j=1}^{A_2} (1 - \Gamma_{ij}) | \phi_{A_2} \rangle | \phi_{A_1} \rangle. \quad (8)
\end{aligned}$$

将(8)式代入(6)式, 即可得到硬球近似下的散射振幅为:

$$\begin{aligned}
F_{A_1 A_2}^R(q) &= \Theta(q) \frac{iK}{2\pi} \int d^2 b e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{b}} \\
&\quad \cdot \left[1 - \langle \phi_{A_1} | \prod_{i=1}^{A_1} \langle \phi_{A_2} | \prod_{j=1}^{A_2} (1 - \Gamma_{ij}) | \phi_{A_2} \rangle | \phi_{A_1} \rangle \right]. \quad (9)
\end{aligned}$$

当只是研究(9)式对于(6)式的近似好坏程度而不是与实验比较时, 我们将两式的共同因子 $\Theta(q)$ 省略了。

我们假定, 原子核的波函数取通常被选用的形式, 即简单的高斯型密度乘积的形式:

$$| \phi_A(\mathbf{r}_1, \cdots, \mathbf{r}_A) |^2 = \prod_{i=1}^A \rho(\mathbf{r}_i), \quad (10)$$

$$\rho(\mathbf{r}_i) = \left(\frac{\alpha^2}{\pi} \right)^{3/2} e^{-\alpha^2 r_i^2}. \quad (11)$$

利用(3)、(4)、(10)、(11)式, 代入到(2)和(5)式, 可分别求得精确的 Glauber 振幅 $F_{A_1 A_2}^G(q)$ 和硬球近似下的振幅 $F_{A_1 A_2}^R(q)$ 。

当 $A_1 = 2, A_2 = 2$ 时, 精确振幅表达式为

$$F_{22}^G(q) = F_{22}^{G(1)}(q) + F_{22}^{G(2)}(q) + F_{22}^{G(3)}(q) + F_{22}^{G(4)}(q). \quad (12)$$

其中各项的具体表达式为:

$$F_{22}^{G(1)}(q) = iKg \left(4\beta^2 e^{-\frac{(\alpha^2 \beta^2 + 1)q^2}{2\alpha^2}} \right), \quad (13)$$

$$F_{22}^{G(2)}(q) = -iKg^2 \left(\frac{4\alpha^2 \beta^4}{2\alpha^2 \beta^2 + 1} e^{-\frac{(2\alpha^2 \beta^2 + 3)q^2}{8\alpha^2}} + \frac{\alpha^2 \beta^4}{\alpha^2 \beta^2 + 1} e^{-\frac{(\alpha^2 \beta^2 + 1)q^2}{4\alpha^2}} \right), \quad (14)$$

$$F_{22}^{G(3)}(q) = iKg^3 \left(\frac{4\alpha^4 \beta^6}{(3\alpha^2 \beta^2 + 1)(\alpha^2 \beta^2 + 1)} e^{-\frac{(2\alpha^4 \beta^4 + 4\alpha^2 \beta^2 + 1)q^2}{4\alpha^2(3\alpha^2 \beta^2 + 1)}} \right). \quad (15)$$

$$F_{22}^{R(4)}(q) = -iKg^4 \left(\frac{\alpha^4 \beta^6}{4(\alpha^2 \beta^2 + 1)^2} e^{-\frac{(\alpha^2 \beta^2 + 2)}{8\alpha^2} q^2} \right). \quad (16)$$

而硬球近似下散射振幅的表达式为

$$F_{22}^R(q) = F_{22}^{R(1)}(q) + F_{22}^{R(2)}(q) + F_{22}^{R(3)}(q) + F_{22}^{R(4)}(q). \quad (17)$$

其中

$$F_{22}^{R(1)}(q) = iKg(4\beta^2 e^{-\frac{(\alpha^2 \beta^2 + 1)}{2\alpha^2} q^2}), \quad (18)$$

$$F_{22}^{R(2)}(q) = -iKg^2 \left(\frac{2\alpha^2 \beta^4}{(2\alpha^2 \beta^2 + 1)} e^{-\frac{(2\alpha^2 \beta^2 + 3)}{8\alpha^2} q^2} + \frac{2\alpha^2 \beta^2}{(\alpha^2 \beta^2 + 1)} e^{-\frac{(\alpha^2 \beta^2 + 1)}{4\alpha^2} q^2} \right), \quad (19)$$

$$F_{22}^{R(3)}(q) = iKg^3 \left(\frac{16\alpha^4 \beta^6}{(2\alpha^2 \beta^2 + 1)(6\alpha^2 \beta^2 + 7)} e^{-\frac{(\alpha^2 \beta^2 + 1)(2\alpha^2 \beta^2 + 3)}{2\alpha^2(6\alpha^2 \beta^2 + 7)} q^2} \right), \quad (20)$$

$$F_{22}^{R(4)}(q) = -iKg^4 \left(\frac{2\alpha^6 \beta^8}{(2\alpha^2 \beta^2 + 1)^2(2\alpha^2 \beta^2 + 3)} e^{-\frac{(2\alpha^2 \beta^2 + 3)}{16\alpha^2} q^2} \right), \quad (21)$$

其中

$$g = \frac{\sigma(1 - i\rho)}{4\pi\beta^2}.$$

对于 $A_1 = 2, A_2 = 3; A_1 = 3, A_2 = 2; A_1 = 3, A_2 = 3$ 三种情况, 无论是硬球近似或精确展开, 其振幅的具体表示式都很冗繁, 这里不再给出. 但需要指出的是, 当 $A_1 \approx A_2$ 时很容易证明 $F_{A_1 A_2}^C(q) = F_{A_2 A_1}^C(q)$, 但 $F_{A_1 A_2}^R(q) \neq F_{A_2 A_1}^R(q)$.

最后, 微分截面通过下面公式计算:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |F(q)|^2. \quad (22)$$

三、结果与讨论

为了简单, 我们把原子核 A_1 和原子核 A_2 间的散射简称为 $A_1 + A_2$. 我们对于 $2 + 2, 2 + 3, 3 + 2$ 和 $3 + 3$ 四种情况, 分别计算了 Glauber 的精确展开与硬球近似下的微分截面, 进行比较.

为了研究精确解和硬球解的差别与能量的关系, 对于不同入射能量 0.35, 1.0 和 23.1 GeV (每个核子的入射动能) 进行了计算. 基本参数 σ, ρ, β^2 采用符合实际情况的数值. 结果如图 1、2、3、4 所示.

在基本输入参数中, 不确定性最大的是 ρ . 因此, 我们采用几种不同的 ρ 值进行计算, 以便研究硬球近似好坏程度与 ρ 的关系. 结果如图 5、6、7、8 所示.

代表原子核大小的参数 α^2 , 在几个很轻的原子核中间也起伏较大. 因此在图 9 和图 10 中我们给出了两种方法的结果对于不同的 α^2 值的变化关系曲线.

综观各图, 可以看到如下的一些定性结果:

(i) 一直到微分截面曲线的第二个谷以前, Glauber 精确展开和硬球近似两种结果间的差别很小.

(ii) 上述结果 (即 (i)), 在一个相当大变化的能量范围内, 保持成立; 同样, 对于基本

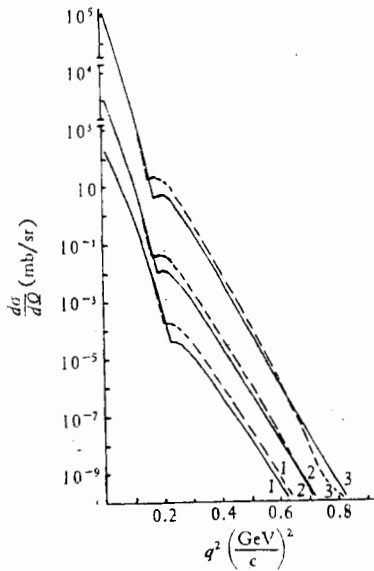


图 1 2+2 散射截面随入射能量的变化

(实线表示精确解,虚线表示硬球近似,以下各图同)

- (1) $T = 0.35 \text{ GeV}$, $\sigma = 28 \text{ mb}$, $\rho = 0.35$,
 $\alpha^2 = 0.4 \text{ fm}^{-2}$, $\beta^2 = 1.2 (\text{GeV}/c)^{-2}$
- (2) $T = 1 \text{ GeV}$, $\sigma = 44 \text{ mb}$, $\rho = -0.275$,
 $\alpha^2 = 0.4 \text{ fm}^{-2}$, $\beta^2 = 5.45 (\text{GeV}/c)^{-2}$
- (3) $T = 23.1 \text{ GeV}$, $\sigma = 39 \text{ mb}$, $\rho = -0.20$,
 $\alpha^2 = 0.4 \text{ fm}^{-2}$, $\beta^2 = 12.2 (\text{GeV}/c)^{-2}$

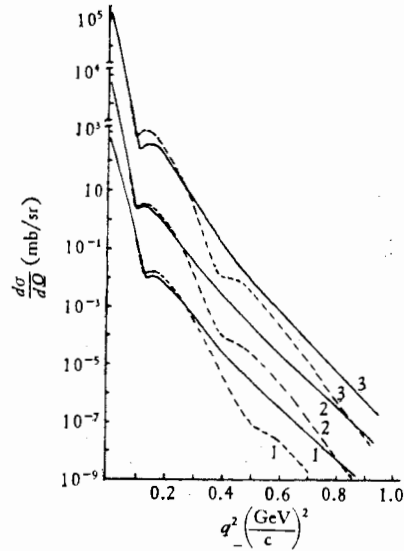


图 2 3+3 散射截面随入射能量的变化

(说明同图 1)

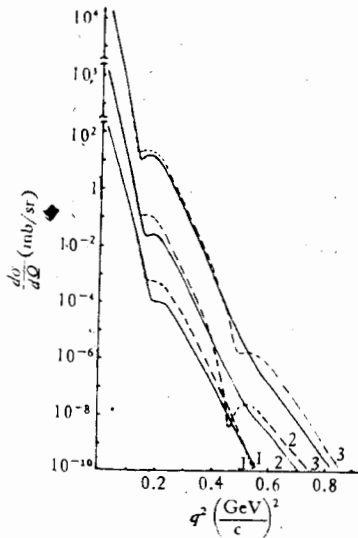


图 3 2+3 散射截面随入射能量的变化

(入射核 $\alpha_1^2 = 0.4 \text{ fm}^{-2}$, 靶核 $\alpha_2^2 = 0.31 \text{ fm}^{-2}$,
其余同图 1)

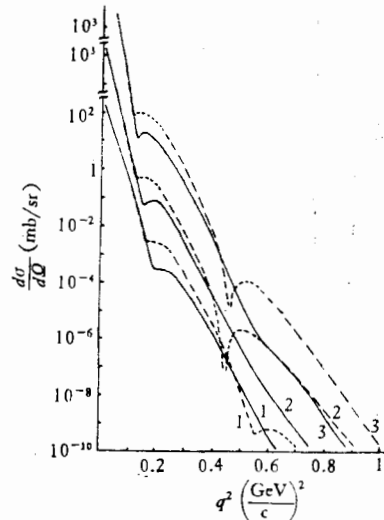
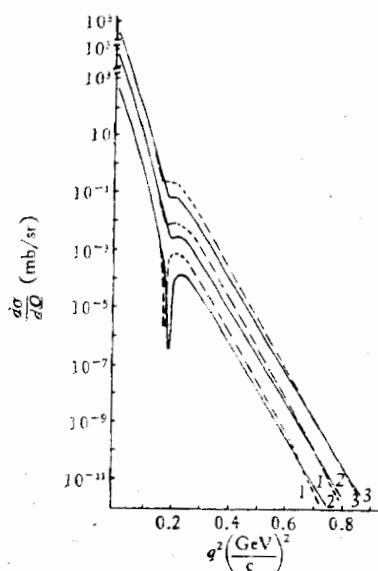


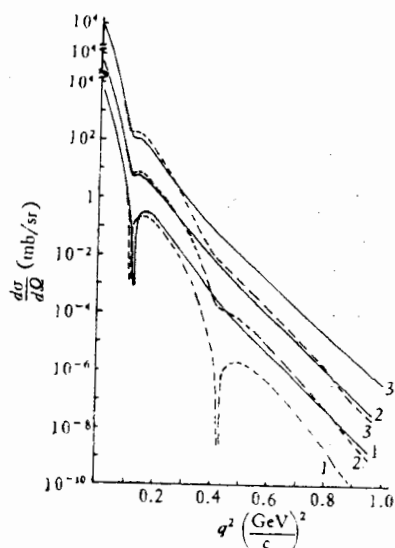
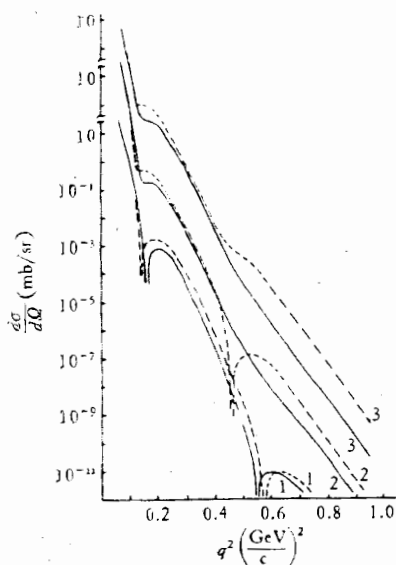
图 4 3+2 散射截面随入射能量的变化

(入射核 $\alpha_1^2 = 0.31 \text{ fm}^{-2}$, 靶核 $\alpha_2^2 = 0.4 \text{ fm}^{-2}$,
其余同图 1)

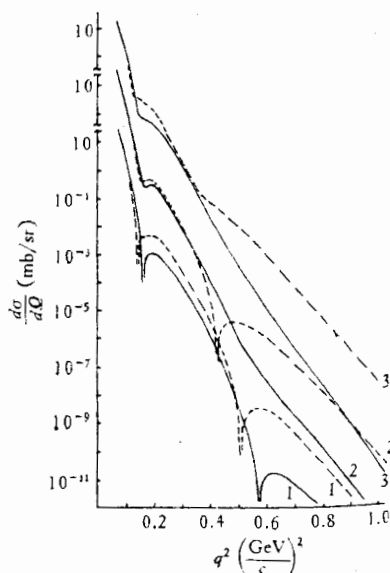
文
刊
微
直
计
图
间
本

图5 2+2 散射截面随 ρ 的变化

($T = 1\text{GeV}$, $\sigma = 40\text{mb}$, $\beta^2 = 5(\text{GeV}/c)^{-2}$,
 $\alpha^2 = 0.4f_m^{-2}$, (1) $\rho = 0$, (2) $\rho = \pm 3$, (3) $\rho = \pm 5$)

图6 3+3 散射截面随 ρ 的变化
(说明同图5)图7 2+3 散射截面随 ρ 的变化

(入射核 $\alpha_1^2 = 0.4f_m^{-2}$, 靶核 $\alpha_2^2 = 0.31f_m^{-2}$,
 其余同图5)

图8 3+2 散射截面随 ρ 的变化

(入射核 $\alpha_1^2 = 0.31f_m^{-2}$, 靶核 $\alpha_2^2 = 0.4f_m^{-2}$,
 其余同图5)

散射
为两
问题

[1]

[2]

[3]

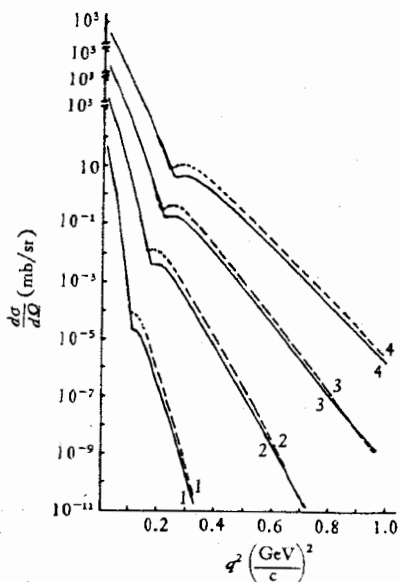
[4]

[5]

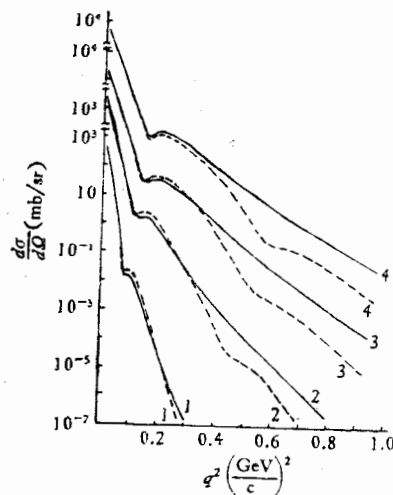
[6]

振幅中实虚比参数 ρ 和原子核大小参数 α 的相当大变化, 结论(i)亦仍然成立。

因此我们可以得到结论: 硬球近似是 Glauber 公式的一个好的近似。它提供了一个实际可行的处理核-核散射的方法。

图 9 2+2 散射截面随 α^2 的变化

($T = 1 \text{ GeV}$, $\sigma = 40 \text{ mb}$, $\rho = -0.3$,
 $\beta^2 = 5(\text{GeV}/c)^{-2}$ (1) $\alpha^2 = 0.2 \text{ fm}^{-2}$
 (2) $\alpha^2 = 0.4 \text{ fm}^{-2}$ (3) $\alpha^2 = 0.6 \text{ fm}^{-2}$
 (4) $\alpha^2 = 0.8 \text{ fm}^{-2}$)

图 10 3+3 散射截面随 α^2 的变化

(说明同图 9)

上述结论是在少数粒子系统的情况下得到的。因此,它对于处理很轻的原子核间的散射问题,有实际意义。当使用集团结构去处理原子核时,例如把 ^{12}C 被 ^{12}C 的散射处理为两个 3α 体系间的散射,上述结论当然也具有实际意义。而对于较多粒子体系间的散射问题,上述结论具有参考价值。

参 考 文 献

- [1] R. J. Glauber, Lectures in Theor. Phys. Vol. 1 eds, W. E. Brittin and L. G. Dunham (Interscience, New York, 1959) P. 315.
- [2] J. Saudinos and C. Wilkin, *Ann. Rev. Nucl. Sci.*, **24**(1974), 341.
- [3] J. M. Eisenberg and D. S. Koltun, *Theory of Meson Interaction with Nuclei* (John Wiley & Sons, Inc. 1980).
- [4] W. Czyz and L. C. Maximon, *Ann. Phys. (N. Y.)*, **52** (1969), 59.
- [5] G. D. Alkhozov et al, *Nucl. Phys.*, **A280**(1977), 365.
- [6] R. H. Bassel and C. Wilkin, *Phys. Rev.*, **174**(1968), 1179.

A COMPARISON BETWEEN GLAUBER'S EXACT EXPANSION FORMULA AND THE RIGID PROJECTILE APPROXIMATION

TAN ZHEN-QIANG JIANG YI-AN CHEN KE-ZHONG

(*Kwangsi University*)

LI QING-RUN

(*Institute of High Energy Physics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

The exact amplitudes of the Glauber theory for the nucleus-nucleus scattering are compared with the amplitudes of the rigid projectile approximation in some simple cases. The calculated results show that the rigid projectile approximation is in general a good approximation of the Glauber theory.

个SL
方程
矢的
结果
公式.

角动
色子
通常
的, Δn
号内.

$1/p^2$
关.
 $\Delta n =$
基矢
第一
矩阵