

^{40}Ca 的核子密度、动能密度、自旋密度 和电荷密度的壳模型计算

申庆彪 田野 刘瑞哲

(中国科学院原子能研究所)

摘 要

本文对 ^{40}Ca 调试了一套与能量无关的 Woods-Saxon 型的定域势的势参数, 用这套只包含少数几个参数的核势进行单粒子壳模型计算, 所得到的单粒子能量和实验值相比不仅顺序是一致的, 而且除去中子的 $1s$ 态与质子的 $1s$ 态和 $1p$ 态理论值比实验值明显偏小以外, 其它态的理论值和实验值都比较接近, 同时计算的电荷分布和电荷均方根半径, 都和由电子弹性散射和 μ 原子 X 射线数据所确定的实验值符合得很好. 在此基础上我们又计算了 ^{40}Ca 的核子密度、动能密度和自旋密度, 给出了它们的形状和数值.

一、引 言

具有 Woods-Saxon 型位的单粒子壳模型是一种能够成功地计算核结构的模型理论^[1,2]. 用与能量无关的 Woods-Saxon 型定域势计算 ^{40}Ca 的质子单粒子能量以及用由波函数所得到的电荷分布来分析电子弹性散射数据也取得了一定的成功^[3]. 此后, 又用与能量有关的定域势^[4]和与能量无关的非定域势^[5]对 ^{40}Ca 等核素进行了计算. 然而, 随着实验上所确定的核子单粒子能量数据的不断丰富^[6], 特别是由电子弹性散射和 μ 原子 X 射线数据所进行的“与模型无关”的分析给出的原子核电荷分布的详细结构^[7-10], 核结构的理论模型能否同时符合这些实验数据, 对理论来说确实是个考验. 为此有不少人对原子核的单粒子能量和电荷分布进行了 Hartree-Fock 计算^[6,11-14], 但是在一些情况下 Hartree-Fock 计算不能很好地符合实验数据. 最近 Hodgson 等人用与能量有关的 Woods-Saxon 型的非定域势计算了 ^{40}Ca 等核素的电荷分布和单粒子结构^[15,16], 得到了和实验符合较好的结果. 虽然认为核势与能量有关, 即认为不同能级上的核子所感受到的平均场也在理论上是合理的^[17], 但是作为一种模型理论, 用那么多可调参数去符合实验数据并不令人满意. 为此我们以 ^{40}Ca 为例, 想研究一下能否找到一组只包含少数几个参数的与能量无关的定域势来同时符合单粒子能量、电荷分布和电荷均方根半径等实验数据.

另外,在 Skyrme 力及其它有效核力的 Hartree-Fock 计算中,不仅用到核子密度 $\rho_r(r)$, 而且还定义了动能密度 $T_r(r)$ 和自旋密度 $J_r(r)$ ^[12-14,6] 两个物理量。在求自洽解过程中 $T_r(r)$ 和 $J_r(r)$ 与 $\rho_r(r)$ 一样在核子的平均场和波函数之间起着桥梁作用。然而上述文章均未给出 $T_r(r)$ 和 $J_r(r)$ 的计算结果。为此我们打算在尽可能调节势参数符合实验数据的基础上计算出 $\rho_r(r)$ 、 $T_r(r)$ 和 $J_r(r)$, 给出它们的形状和数值。这种唯象方法所得到的计算结果将来可做为微观理论计算的比较对象。

第二节给出了计算的理论公式,第三节给出了调试后得到的势参数、计算结果并且进行一些讨论。

二、理论公式

在单粒子壳模型中认为每个核子都独立地在一个平均场中运动,而这个平均场是由原子核中所有核子之间的两体相互作用所形成的。

球形核的单粒子波函数可以写成:

$$\varphi_{nljm}^{\tau}(\mathbf{r}) = \frac{u_{nlj}^{\tau}(r)}{r} y_{lj\frac{1}{2}}^m, \quad (1)$$

其中

$$y_{lj\frac{1}{2}}^m = \sum_{\mu} C_{lm-\mu, \frac{1}{2}\mu}^{jm} Y_{l, m-\mu} X_{\mu}, \quad (2)$$

n 是径向量子数, l 和 j 分别为轨道角动量和核子总角动量, 同位旋 $\tau = -\frac{1}{2}$ 代表中子, $\tau = \frac{1}{2}$ 代表质子, $C_{lm-\mu, \frac{1}{2}\mu}^{jm}$ 是克莱布施-戈登系数, X_{μ} 是自旋波函数。能量为 E 的单个核子的径向波函数 $u_{nlj}^{\tau}(r)$ 所满足的方程为:

$$\frac{d^2 u_{nlj}^{\tau}(r)}{dr^2} - \left[\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2m_{\tau}}{\hbar^2} (V(r) + E) \right] u_{nlj}^{\tau}(r) = 0. \quad (3)$$

m_{τ} 是同位旋为 τ 的核子质量。 $V(r)$ 取 Woods-Saxon 型位阱:

$$V(r) = -V_0 f_1(r) + V_s \left(\frac{\hbar^2}{m_{\pi} c} \right)^2 \frac{1}{r} \frac{df_2(r)}{dr} (\mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\sigma}) + V_c(r). \quad (4)$$

其中

$$\begin{aligned} f_1(r) &= \{1 + \exp[(r - R_0)/a_0]\}^{-1}, \\ f_2(r) &= \{1 + \exp[(r - R_s)/a_s]\}^{-1}. \end{aligned} \quad (5)$$

$R_0 = r_0 A^{1/3}$, $R_s = r_s A^{1/3}$, $\left(\frac{\hbar^2}{m_{\pi} c}\right)^2 \cong 2\text{fm}^2$. $V_0, V_s, r_0, r_s, a_0, a_s$ 是对中子和质子可以取不同数值的势参数。 $V_c(r)$ 是仅对质子起作用的半径为 $R_c = r_c A^{1/3}$ 均匀带电球的静电场:

$$V_c(r) = \begin{cases} \frac{(Z-1)e^2}{2R_c} \left(3 - \frac{r^2}{R_c^2}\right), & \text{当 } r \leq R_c \text{ 时} \\ \frac{(Z-1)e^2}{r}. & \text{当 } r > R_c \text{ 时} \end{cases} \quad (6)$$

方程(3)可用数值方法求解^[10], 所得到的能量 E 的本征值 E_{nlj}^r 即为原子核的单粒子能量。

在用 Skyrme 力及其它有效核力的 Hartree-Fock 计算中定义了核子密度 $\rho_r(\mathbf{r})$, 动能密度 $T_r(\mathbf{r})$ 和自旋密度 $J_r(\mathbf{r})$, 它们的定义为^[12-14, 6]:

$$\rho_r(\mathbf{r}) = \sum_i |\varphi_i^r(\mathbf{r})|^2, \quad \rho(\mathbf{r}) = \sum_r \rho_r(\mathbf{r}), \quad (7)$$

$$T_r(\mathbf{r}) = \sum_i |\nabla \varphi_i^r(\mathbf{r})|^2, \quad T(\mathbf{r}) = \sum_r T_r(\mathbf{r}), \quad (8)$$

$$J_r(\mathbf{r}) = \frac{1}{r} \sum_i \varphi_i^{r*}(\mathbf{r})(\mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\sigma})\varphi_i^r(\mathbf{r}), \quad J(\mathbf{r}) = \sum_r J_r(\mathbf{r}). \quad (9)$$

对于球形核来说把波函数的表达式(1)代入以上三式可以求得:

$$\rho_r(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \sum_{nlj} (2j+1)(u_{nlj}^r(r))^2, \quad (10)$$

$$T_r(r) = \frac{1}{4\pi r^4} \sum_{nlj} (2j+1) \left\{ \left[r \frac{du_{nlj}^r(r)}{dr} - u_{nlj}^r(r) \right]^2 + l(l+1)(u_{nlj}^r(r))^2 \right\}, \quad (11)$$

$$J_r(r) = \frac{1}{4\pi r^3} \sum_{nlj} (2j+1) \left[j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right] (u_{nlj}^r(r))^2. \quad (12)$$

其中对 nlj 求和只在费米面以下进行。

用以上方法所求得的 $\rho_p(\mathbf{r})$ 代表点质子的空间分布。事实上质子不是点电荷, 从电磁意义上讲质子是有限大小的, 因此原子核的电荷分布 $\rho_c(\mathbf{r})$ 可以从点质子的空间分布 $\rho_p(\mathbf{r})$ 用质子本身的电荷分布进行折迭而得到, 即

$$\rho_c(\mathbf{r}) = \int f_p(\mathbf{r}-\mathbf{s})\rho_p(\mathbf{s})d\mathbf{s} \quad (13)$$

其中 $f_p(\mathbf{r}-\mathbf{s})$ 代表质子本身归一化的电荷分布。质子电荷分布的形状因子可以取高斯型的^[4, 12]:

$$f_p(r) = \frac{1}{(a_p\sqrt{\pi})^3} e^{-r^2/a_p^2}, \quad a_p = 0.65\text{fm} \quad (14)$$

对于球形核可以求得:

$$\rho_c(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi} a_p} \frac{1}{r} \int_0^\infty s \left[e^{-\frac{(r-s)^2}{a_p^2}} - e^{-\frac{(r+s)^2}{a_p^2}} \right] \rho_p(s) ds. \quad (15)$$

当 $\rho_n(r)$, $\rho_p(r)$ 和 $\rho_c(r)$ 已知后, 则相应的中子均方根半径, 质子均方根半径和电荷均方根半径分别为:

$$\langle r_n^2 \rangle^{\frac{1}{2}} = \left\{ \frac{4\pi}{N} \int_0^\infty r^4 \rho_n(r) dr \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (16)$$

$$\langle r_p^2 \rangle^{\frac{1}{2}} = \left\{ \frac{4\pi}{Z} \int_0^\infty r^4 \rho_p(r) dr \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (17)$$

$$\langle r_c^2 \rangle^{\frac{1}{2}} = \left\{ \frac{4\pi}{Z} \int_0^\infty r^4 \rho_c(r) dr \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (18)$$

三、势参数、计算结果和讨论

通过对 ^{40}Ca 多次计算并反复与实验数据进行比较, 我们得到了一套能使理论计算结

果较好地符合实验数据的势参数(见表1)。在这套势参数中取了 $r_0 = r_s$ 和 $a_0 = a_s$, 而且对质子还取了 $r_0 = r_s = r_c$, 因而对中子和质子来说都只剩下四个势参数可调。

表1 ^{40}Ca 的 Woods-Saxon 位的势参数

	V_0 (MeV)	V_s (MeV)	r_0 (fm)	r_s (fm)	a_0 (fm)	a_s (fm)	r_c (fm)
中子	47.50	7.3	1.34	1.34	0.69	0.69	
质子	52.75	7.0	1.30	1.30	0.70	0.70	1.30

首先我们用表1所给出的势参数计算了 ^{40}Ca 的单粒子能量和波函数。在表2和图1

表2 ^{40}Ca 单粒子能量理论值和实验值的比较

	中子		质子	
	理论值 (MeV)	实验值 (MeV)	理论值 (MeV)	实验值 (MeV)
$1s_{1/2}$	36.56	50.0	32.42	50 ± 11
$1p_{3/2}$	27.94	30.0	23.54	34 ± 6
$1p_{1/2}$	26.09	27.0	21.59	
$1d_{3/2}$	18.63	21.9	13.90	
$2s_{1/2}$	15.33	18.2	10.51	10.9
$1d_{5/2}$	14.80	15.6	9.98	8.3
<hr/>				
$1f_{7/2}$	8.93	8.4	3.87	1.4
$2p_{3/2}$	5.82	6.3	0.98	
$2p_{1/2}$	4.03	4.3		
$1f_{5/2}$	3.05	2.9		

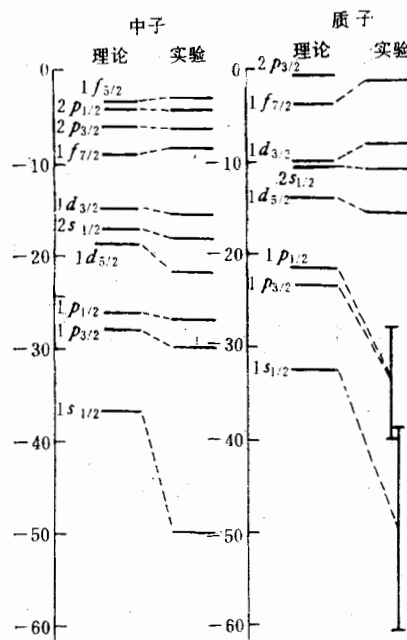


图1 ^{40}Ca 单粒子能量理论值和实验值的比较

—
中
子
和
文
多
2
范
向

出
的
老
本
必
能
行

中把 ^{40}Ca 的单粒子能量理论值和实验值^[6]进行了比较。从图 1 可以看出理论计算的单粒子能级和实验确定的单粒子能级排列顺序是一致的,而且除去中子的 $1s$ 态与质子的 $1s$ 态和 $1p$ 态的理论值比实验值明显偏小外,其它能级理论值和实验值都比较接近。而用参考文献[3]所给出的质子势参数所计算的质子 $1f_{7/2}$ 态为 5.87MeV , 比实验值 1.4MeV 大得太多。用表 1 中的势参数所计算的 ^{40}Ca 中子和质子归一化的单粒子径向波函数分别画在图 2 和图 3 中。从图 2 和图 3 可以看出量子数 $(n-1)$ 代表波函数 $u_{n,l}^{\pm}(r)$ 在 $0 < r < \infty$ 范围内的零点个数。而且还可以看出对于 n 相同 l 不同的分波来说, l 越大波函数的峰越向 r 大的方向移动。

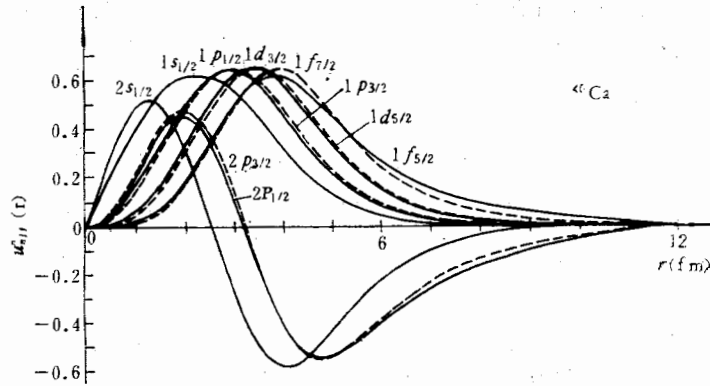
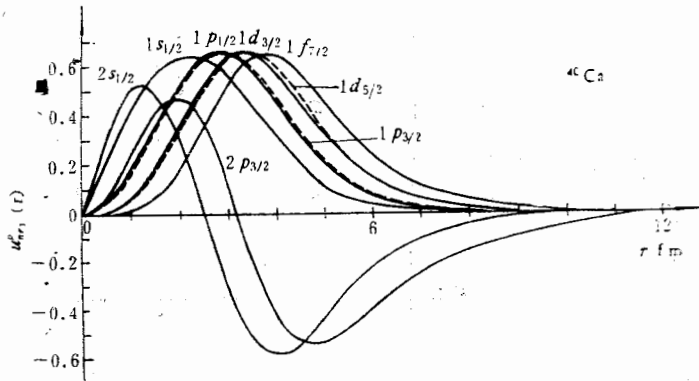
图 2 ^{40}Ca 中子态归一化的单粒子径向波函数图 3 ^{40}Ca 质子态归一化的单粒子径向波函数

图 4 给出了计算的中子密度 $\rho_n(r)$ 、质子密度 $\rho_p(r)$ 和总的核子密度 $\rho(r)$ 。可计算出计算的核子密度在核中心区域比较突出,这与在 Hartree-Fock 计算中和其他核相比 ^{40}Ca 的核子密度在核中心区域也比较突出^[6,12]是一致的,其原因主要是由于 ^{40}Ca 的 $1s$ 态和 $2s$ 态波函数的贡献相对比较大所引起的。

关于动能密度和自旋密度尚未见到别人的计算结果。图 5 给出了我们计算的中子动能密度 $T_n(r)$ 、质子动能密度 $T_p(r)$ 和总的动能密度 $T(r)$ 。可以看出动能密度的数值和核子密度是同数量级的,其形状在核内区域有一个峰。图 6 给出了计算的中子自旋密度

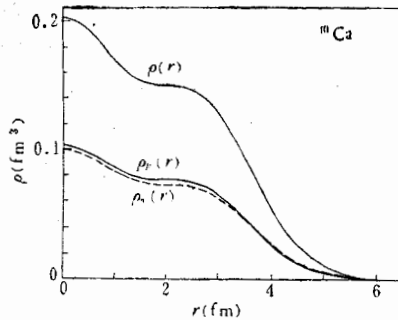


图4 ^{40}Ca 的中子密度 $\rho_n(r)$ 、质子密度 $\rho_p(r)$ 和总的核子密度 $\rho(r)$

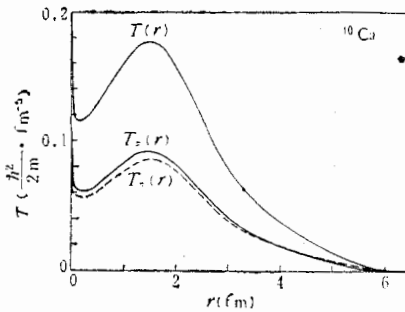


图5 ^{40}Ca 的中子动能密度 $T_n(r)$ 、质子动能密度 $T_p(r)$ 和总的动能密度 $T(r)$

$J_n(r)$ 、质子自旋密度 $J_p(r)$ 和总的自旋密度 $J(r)$ 。这里所定义的自旋密度实质上是自旋-轨道耦合 $\frac{1}{r} \vec{l} \cdot \vec{\sigma}$ 的密度。由图6可以看出自旋密度的数值较小, 而且在 $r=0$ 处为0, 随着 r 增大先出现一个负值峰, 在核边界附近转为正值, 然后又出现一个较小的正值峰。以上结果表明在核内部自旋和轨道角动量反方向为主, 在核边界附近却是同方向为主。

图7给出了 ^{40}Ca 电荷分布理论值和实验值^[10]的比较。这种实验值是根据电子弹性散射和 μ 原子 X 射线数据用“与模型无关”的方式确定的, 并且在核中心区域得到了类型 I 和类型 II 两种实验数据。从图7可以看出我们所计算的 ^{40}Ca 的电荷分布和实验符合很好, 并且是支持类型 II 的结果。

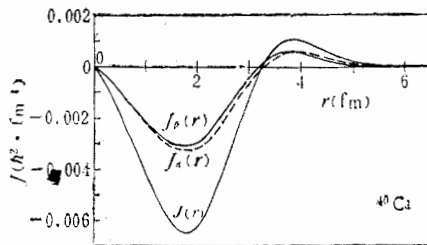


图6 ^{40}Ca 的中子自旋密度 $J_n(r)$ 、质子自旋密度 $J_p(r)$ 和总的自旋密度 $J(r)$

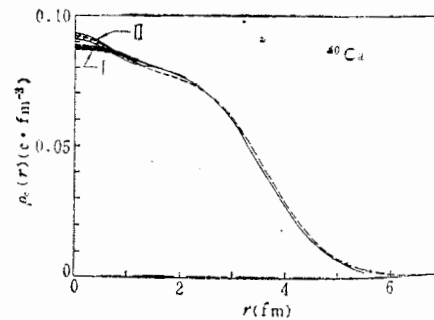


图7 ^{40}Ca 的电荷分布理论值和实验值的比较
---理论值; —实验值 IIII 实验, 类型 II;
IIIIII 实验, 类型 I

表3 ^{40}Ca 的均方根半径理论值和实验值的比较

$\langle r_n^2 \rangle^{\frac{1}{2}}$ (fm)	$\langle r_p^2 \rangle^{\frac{1}{2}}$ (fm)	$\langle r_c^2 \rangle^{\frac{1}{2}}$ (fm)	
理论	理论	理论	实验
3.439	3.395	3.487	3.487

在表 3 中列出了根据公式 (16)—(18) 所计算的中子均方根半径 $\langle r_n^2 \rangle^{\frac{1}{2}}$, 质子均方根半径 $\langle r_p^2 \rangle^{\frac{1}{2}}$ 和电荷均方根半径 $\langle r_c^2 \rangle^{\frac{1}{2}}$, 同时给出了由电子弹性散射和 μ 原子 X 射线数据所确定的电荷均方根半径^[7], 可以看出 $\langle r_c^2 \rangle^{\frac{1}{2}}$ 的理论值和实验值完全符合。

以上结果表明用我们所调试的一套只包含少数几个势参数与能量无关的 Woods-Saxon 型定域势对 ^{40}Ca 进行壳模型计算, 所得到的单粒子能量和实验值相比不仅顺序是一致的, 而且除去中子的 $1s$ 态与质子的 $1s$ 态和 $1p$ 态理论值比实验值明显偏小以外, 其他能级理论值和实验值都比较接近, 同时计算的电荷分布和电荷均方根半径都和实验符合很好。在此基础上我们所计算的核子密度、动能密度和自旋密度当然也有一定的可信性。

最后作者感谢卓益忠、马中玉、李祝霞对此工作的支持和所进行的一些有益讨论。

参 考 文 献

- [1] A. A. Ross, H. Mark and R. D. Lawson, *Phys. Rev.*, **102**(1956), 1613.
- [2] J. Blomqvist and S. Wahlborn, *Arkiv För Fysik*, **16**(1960), 545.
- [3] R. R. Shaw, A. Swift and L. R. B. Elton, *Proc. Phys. Soc.*, **86**(1965), 513.
- [4] L. R. B. Elton and A. Swift, *Nucl. Phys.*, **A94**(1967), 52.
- [5] L. R. B. Elton and S. J. Webb, *Phys. Rev. Lett.*, **24**(1970), 145.
- [6] X. Campi and D. W. Sprung, *Nucl. Phys.*, **A194**(1972), 401.
- [7] R. F. Frosh et al. *Phys. Rev.*, **174**(1968), 1380.
- [8] J. L. Friar and W. Negele, *Nucl. Phys.*, **A212**(1973), 93.
- [9] I. Sick, *Nucl. Phys.*, **A218**(1974), 509.
- [10] I. Sick, *Phys. Lett.*, **53B**(1974), 15.
- [11] X. Campi, *Hartree-Fock and self-consistent field theories in nuclei* (North-Holland, Amsterdam, 1975) P. 271.
- [12] D. Vautherin and D. M. Brink, *Phys. Rev.*, **C5**(1972), 626.
- [13] M. Beiner, H. Flocard, Nguyen Van Giai and P. Quentin. *Nucl. Phys.*, **A238**(1975), 29.
- [14] C. B. Dover and Nguyen Van Giai, *Nucl. Phys.*, **A190**(1972), 373.
- [15] F. Malaguti, A. Uguzzoni, E. Verondini and P. E. Hodgson, *Nucl. Phys.*, **A297**(1978), 287.
- [16] F. Malaguti, A. Uguzzoni, E. Verondini and P. E. Hodgson, *Nuovo Cimento*, **49A**(1979), 412.
- [17] K. A. Brueckner, *Proc. Int. Congress on nuclear physics, Vol. 1* (Editions du Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1964), p. 462.
- [18] B. Buck and P. E. Hodgson, *Phil. Mag.*, **6**(1961), 1371.

CALCULATIONS OF NUCLEON DENSITIES, KINETIC ENERGY DENSITIES, SPIN DENSITIES AND CHARGE DENSITY WITH SHELL MODEL FOR ^{40}Ca

SHEN QING-BIAO TIAN YE LIU RUI-ZHE

(*Institute of Atomic Energy, Academia Sinica*)

ABSTRACT

In this paper a set of energy-independent local Woods-Saxon potential parameters for ^{40}Ca are adjusted to perform the single-particle shell model calculations. By use of these parameters the single-particle energies are calculated. The results are compared with the experimental data. It is shown that the agreements between them are not only in order but also in position of levels which are very close except the theoretical values for 1s state of neutrons and 1s and 1p states of protons are evidently lower than the experimental ones. In addition, the charge density and the root mean square radius of charge distribution are also calculated. They are in very good agreement with experimental values obtained from the elastic electron scattering and the muonic X-ray data. On the basis of the previous studies the nucleon densities, kinetic energy densities and spin densities of ^{40}Ca are calculated. Their shape and values are presented in this paper.

理论
核)
公式

但是
极相
似¹⁴
zov
线¹⁵

算身