

研究简报

四重子系统核谱

xford, 1977.

王 淮 滩 张禹顺 潘辑智 王如琳

(中国科学院理论物理所) (中国科学院高能物理所)

ctions (Ma

摘要

本文用 $SU(6)$ 对称理论讨论了四重子系统, 为分析实验谱提供了一种方法。利用 ^{1A}H , ^{1A}He , ^{1A}H , ^{1A}He 和 ^{1A}He 的基态是在 $SU(6)$ 的同一个不可约表示中, 从 ^{1A}H , ^{1A}He 和 ^{1A}He 的实验资料可以求出 ^{1A}H 和 ^{1A}He 的质量。计算表明 $J^{\pi} = 0^+$ 双 Λ 超核 ^{1A}H 和 ^{1A}He 不象有束缚态。

近年来, 对 $A = 4$ 的 Λ 超核和双 Λ 超核已有一些研究^[1]。本文在文章[2]的基础上, 统一地讨论 $A = 4$ 的核、 Λ 超核和双 Λ 超核等重子系统。

单重子 $SU(6)$ 波函数为^[2]

$$\phi_a = \chi_r \phi_a \left(\begin{array}{c} a = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ r = 1, 2; \alpha = 1, 2, 3 \end{array} \right) \quad (1)$$

其中 ϕ_a 是以 p. n. Λ 为基础粒子的 $SU(3)$ 波函数, χ_r 是相应的 $SU(2)$ 自旋波函数。

四重子系统 $SU(6)$ 波函数为

$$\phi_{abcd} = \phi_a \phi_b \phi_c \phi_d = \chi_{rstu} \phi_{\alpha\beta\gamma\delta} \quad (2)$$

$$(a, b, c, d = 1, 2, \dots, 6; r, s, t, u = 1, 2; \alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2, 3)$$

在无穷小变换下

$$\phi'_{abcd} = \phi_{abcd} + i \Theta_{hi} \chi_{ij} \phi_{abcd} \quad (3)$$

其中

$$\chi_{ij} = \sigma_h(1)\lambda_i(1) + \sigma_h(2)\lambda_i(2) + \sigma_h(3)\lambda_i(3) + \sigma_h(4)\lambda_i(4) \quad (4)$$

σ_h , λ_i 分别是 Pauli 矩阵和 Gell-Mann 矩阵

Θ_{hi} 是实数

因此, 和单重子力学量定义^[2]相类似, $4B$ 系统力学量如重子数 \mathbf{B} 、电荷 \mathbf{Q} 、奇异数 \mathbf{S} 、超荷 \mathbf{Y} 、同位旋 \mathbf{T} 和自旋 \mathbf{S} 定义为

$$\mathbf{B} = B(1) + B(2) + B(3) + B(4)$$

$$\mathbf{Q} = Q(1) + Q(2) + Q(3) + Q(4)$$

$$\mathbf{S} = S(1) + S(2) + S(3) + S(4)$$

$$\mathbf{Y} = Y(1) + Y(2) + Y(3) + Y(4)$$

$$\mathbf{T}_1 = T_1(1) + T_1(2) + T_1(3) + T_1(4) \quad (5)$$

$$\mathbf{T}_2 = T_2(1) + T_2(2) + T_2(3) + T_2(4)$$

$$\mathbf{T}_3 = T_3(1) + T_3(2) + T_3(3) + T_3(4)$$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \sigma(1) + \frac{1}{2} \sigma(2) + \frac{1}{2} \sigma(3) + \frac{1}{2} \sigma(4)$$

显然, 对四重子系统盖尔曼-西岛规则成立

$$\mathbf{Q} = \mathbf{T}_3 + \frac{1}{2} \mathbf{Y} \quad (6)$$

根据 Pauli 原理, 四重子系统的总波函数应是全反对称的, 即轨道波函数与内部 $SU(6)$ 波函数之积必须是全反对称波函数。式(2)的四重子系统波函数 ϕ_{abcd} 是可约的, 可用对称群 S_4 的自然单位^[3]将它约化。附录中给出了四重子系统的 $SU(3)$ 波函数的约化。

表 1 给出四重子系统各 $SU(3)$ 不可约表示中各态的量子数。

表 1

	$\phi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{[121]}$						$\phi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{[122]}$					
	1H	1He	1Li	1He	1H	1He	1Li	1H	1He	1Li	1He	1H
Q	1	2	1	2	1	2	1	2	0	1	2	
T_3	-1/2	1/2	0	0	-1/2	1/2	-1	0	1	0	1	
T	1/2	1/2	0	0	1/2	1/2	1	1	1	1	1	
Y	3	3	2	4	3	3	3	2	2	2	2	
	$\phi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{[131]}$											
	1H	1He	1Li	1He	1H	1He	1Li	1H	1He	1Li	1He	1H
Q	1	2	3	0	1	2	3	1	2	0	1	2
T_3	-1	0	1	-3/2	-1/2	1/2	3/2	-1/2	1/2	-1	0	1
T	1	1	1	3/2	3/2	3/2	3/2	1/2	1/2	1	1	1
Y	4	4	4	3	3	3	3	2	2	2	2	1
	$\phi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{[141]}$											
	1n	1H	1He	1Li	1Be	1He	1H	1He	1Li	1He	1H	1He
Q	0	1	2	3	4	0	1	2	3	0	1	2
T_3	-2	-1	0	1	2	-3/2	-1/2	1/2	3/2	-1	0	1
T	2	2	2	2	3/2	3/2	3/2	3/2	1	1	1	1/2
Y	4	4	4	4	4	3	3	3	2	2	2	1

根据 $SU(6) \rightarrow SU(2) \otimes SU(3)$ 分类^[4], 可以得到四重子系统简并能级的自旋-么旋结构, 与 Wigner 的 $SU(4)$ 超多重态的自旋-同位旋结构^[5]比较, 可以看出冻结 Λ 自由度后, 两种分类一致。

四重子系统的 $SU(6)$ 不可约表示分为五类, 即 15 维表示, 相应的杨图为目; 105 维

(5) 表示杨图为田；105 维表示杨图为田；210 维表示杨图为田；126 维表示杨图为田。

下面用重子质量公式^[6]描述四重子系统的质量

$$M(Y, T, S) = M_0 + a_1 Y + a_2 \left[T(T+1) - \frac{Y^2}{4} \right] + a_3 S(S+1) \quad (7)$$

其中， M_0 ， a_1 ， a_2 和 a_3 是表示常数， Y, T, S 分别是四重子系统在具体的 $SU(6)$ 不可约表示中的超荷，同位旋和自旋量子数。

(6)

与内部 $SU(6)$ 不可约的，可用四重子数的约化。

原则上根据 Pauli 原理，选取四条属于同一个 $SU(6)$ 不可约表示的实验能级，可求出该表示中的表示常数，从而求出不同量子数的态的质量，而在实际计算中，常是难于一下子求出表示常数，却可以利用从质量公式推出的质量关系，来讨论具体问题。

在同一个 $SU(6)$ 不可约表示中，不带轨道角动量的态之间，由式(7)可知有两个简单关系。

(1) 如果两个四重子系统的态，其 Y, T, S 等量子数分别相等，则这两个态质量相等。在 $SU(6)$ 15 维表示中， Λ 超核 ${}^4\Lambda H$ 和 ${}^4\Lambda He$ 的基态 (0^+) 质量是基本相等的^[7]， $M({}^4\Lambda H) = 3922.44 \text{ MeV}$ ； $M({}^4\Lambda He) = 3921.57 \text{ MeV}$ ，其差别是由于电荷对称性破坏引起的。

(2) 对 $SU(6)$ 15 维不可约表示可推出

$$M_{AA}(2, 1, 0) = 2M_A(3, 1/2, 0) - M(4, 0, 0) \quad (8)$$

将式(8)用于四重子系统基态，可以看出，由四重子组成的原子核 ${}^4\Lambda He$ ($T = 0, S = 0$) 与 Λ 超核 ${}^4\Lambda H$ 、 ${}^4\Lambda He$ ($T = 1/2, S = 0$) 和双 Λ 超核 ${}^{AA}n$ 、 ${}^{AA}H$ 、 ${}^{AA}He$ ($T = 1, S = 0$) 之间存在着简单的质量关系。换言之，从同一表示中的原子核能级和单 Λ 超核能级可以给出该表示中的双 Λ 超核的能级。

自实验发现 ${}^{10}\Lambda Be$ ^[8] 和 ${}^{10}\Lambda He$ ^[9] 以来，对双 Λ 超核，特别是 ${}^{AA}H$ 的存在性，一直引起人们的兴趣^[1, 10, 11, 12]。Tang 和 Herndon^[10] 利用 ${}^{10}\Lambda Be$ 和 ${}^{10}\Lambda He$ 实验，用变分法计算表明 ${}^{AA}H$ 不象有束缚态，而 Nakamura^[11] 认为所取的模型不同结论也就不同。比如，近年 S. Nakaiichi 和 Y. Akaishi^[12] 利用 ATMS 波函数，也用变分法算了 ${}^3\Lambda H$ 和 ${}^{AA}H$ 能量，认为 ${}^{AA}H$ 有可能存在。不过，在文章最后作者强调为确定其存在还须在有效势的选取上做更深入的分析。这些对 ${}^{AA}H$ 存在的讨论的不确定性，显然与目前人们对 N-N, N- Λ 和 $\Lambda-\Lambda$ 等强相互作用的认识以及唯象势模型的可调性有关。那么， ${}^{AA}H$ 、 ${}^{AA}He$ 存在吗？

从本文对四重子系统 $SU(6)$ 对称性的讨论可以看出，利用式(8)可以回答这一问题。

最近实验给出 ${}^4\Lambda H$ 和 ${}^4\Lambda He$ 基态 Λ 的分离能^[1, 7]

$${}^4\Lambda H: B_\Lambda(0^+) = 2.08 \text{ MeV}; {}^4\Lambda He: B_\Lambda(0^+) = 2.42 \text{ MeV}$$

由于

$$M_{HY} = M_{core} + M_\Lambda - B_\Lambda(g.s.) \quad (9)$$

可得出 ${}^4\Lambda H$ 和 ${}^4\Lambda He$ 的基态质量，

$$M({}^4\Lambda H) = 3922.44 \text{ MeV}; M({}^4\Lambda He) = 3921.57 \text{ MeV}$$

将 ${}^4\Lambda He$, ${}^4\Lambda H$ 和 ${}^4\Lambda He$, ${}^4\Lambda He$ 的质量分别代入(8)式得到 $M({}^{AA}H) = 4117.48 \text{ MeV}$, $M({}^{AA}He) = 4115.74 \text{ MeV}$ 。这些数值比两个自由 Λ 超子和两个自由核子的质量之和还大 $\sim 8 \text{ MeV}$ 。这表明 ${}^{AA}H$ 和 ${}^{AA}He$ 不可能有束缚态，仅可能以共振态形式出现。应该指出， ${}^4\Lambda H$, ${}^4\Lambda He$,

级的自旋
冻结 Λ 自
图为目；10

不存在 $J^* = 0^+$ 束缚态这一结论与所选取的 ${}_1^1\text{H}$, ${}_1^1\text{He}$ 和 ${}^4\text{He}$ 的基态质量是有关的, 因此, 精确的 ${}_1^1\text{H}$, ${}_1^1\text{He}$ 的基态质量的实验测定是重要的。另外, 对 ${}_{AA}^A\text{H}(S=1, T=0, L=0)$ 组态本文未讨论, 该态与 $(S=0, T=0, L=1)$ 组态可能会有混合, 因二者 J^* 相同 ($J^* = 1^+$)。因此, 对于 ${}_{AA}^A\text{H}(J^* = 1^+)$ 的存在问题仍是值得研究的。

作者感谢阮图南和李扬国同志的有益讨论。

附录

四重子系统的 $SU(3)$ 波函数

利用 \mathcal{S}_4 的自然单位^[3]可将 $\phi_{\alpha\beta\gamma\delta}$ 约化

$$\begin{aligned}\phi_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \epsilon\phi_{\alpha\beta\gamma\delta} \\ &= \phi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{Y_A} + \phi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{Y_1} + \phi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{Y_2} + \phi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{Y_3} + \phi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{Y_4} + \phi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{Y_5} + \phi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{Y_6} \\ &\quad + \phi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{Y_7} + \phi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{Y_8} + \phi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{Y_9}\end{aligned}\quad (\text{A.1})$$

其中

$$\phi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{Y_A} = Y_A \phi_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0 \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned}\phi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{Y_1^{[31]}} &= Y_1^{[31]} \phi_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{8} (\phi_{\alpha\beta\gamma\delta} + \phi_{\beta\alpha\gamma\delta} + \phi_{\gamma\beta\alpha\delta} + \phi_{\alpha\gamma\beta\delta} + \phi_{\gamma\alpha\beta\delta} + \phi_{\beta\alpha\delta\gamma} \\ &\quad - \phi_{\beta\gamma\alpha\delta} - \phi_{\beta\alpha\gamma\delta} - \phi_{\beta\alpha\delta\gamma} - \phi_{\delta\alpha\beta\gamma} - \phi_{\delta\alpha\gamma\beta})\end{aligned}\quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned}\phi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{Y_2^{[31]}} &= Y_2^{[31]} \phi_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{8} (\phi_{\alpha\beta\gamma\delta} + \phi_{\beta\alpha\gamma\delta} + \phi_{\alpha\beta\delta\gamma} + \phi_{\alpha\delta\beta\gamma} + \phi_{\delta\alpha\beta\gamma} + \phi_{\beta\delta\alpha\gamma} \\ &\quad - \phi_{\beta\gamma\alpha\delta} - \phi_{\beta\alpha\gamma\delta} - \phi_{\beta\alpha\delta\gamma} - \phi_{\gamma\alpha\beta\delta} - \phi_{\gamma\alpha\delta\beta})\end{aligned}\quad (\text{A.4})$$

$$\begin{aligned}\phi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{Y_3^{[31]}} &= Y_3^{[31]} \phi_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{8} (\phi_{\alpha\beta\gamma\delta} + \phi_{\beta\alpha\gamma\delta} + \phi_{\delta\beta\alpha\gamma} + \phi_{\alpha\delta\beta\gamma} + \phi_{\delta\alpha\beta\gamma} + \phi_{\beta\delta\alpha\gamma} \\ &\quad - \phi_{\beta\gamma\alpha\delta} - \phi_{\beta\alpha\gamma\delta} - \phi_{\beta\alpha\delta\gamma} - \phi_{\beta\delta\alpha\gamma} - \phi_{\beta\delta\alpha\gamma})\end{aligned}\quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned}\phi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{Y_4^{[21^2]}} &= Y_4^{[21^2]} \phi_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{8} (\phi_{\alpha\beta\gamma\delta} + \phi_{\beta\alpha\gamma\delta} + \phi_{\tau\beta\alpha\delta} + \phi_{\beta\alpha\delta\tau} + \phi_{\delta\alpha\beta\tau} + \phi_{\tau\alpha\beta\delta} \\ &\quad - \phi_{\beta\gamma\alpha\delta} - \phi_{\beta\alpha\gamma\delta} - \phi_{\alpha\beta\delta\gamma} - \phi_{\beta\alpha\delta\gamma} - \phi_{\beta\alpha\delta\gamma})\end{aligned}\quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned}\phi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{Y_5^{[21^2]}} &= Y_5^{[21^2]} \phi_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{8} (\phi_{\alpha\beta\gamma\delta} + \phi_{\delta\alpha\gamma\delta} + \phi_{\beta\delta\alpha\gamma} + \phi_{\tau\beta\alpha\delta} + \phi_{\delta\tau\alpha\beta} + \phi_{\beta\delta\alpha\gamma} \\ &\quad - \phi_{\beta\gamma\alpha\delta} - \phi_{\beta\alpha\gamma\delta} - \phi_{\alpha\beta\delta\gamma} - \phi_{\beta\alpha\delta\gamma} - \phi_{\beta\alpha\delta\gamma})\end{aligned}\quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned}\phi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{Y_6^{[21^2]}} &= Y_6^{[21^2]} \phi_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{8} (\phi_{\alpha\beta\gamma\delta} + \phi_{\tau\alpha\gamma\delta} + \phi_{\beta\tau\alpha\delta} + \phi_{\beta\alpha\tau\delta} + \phi_{\tau\beta\alpha\delta} + \phi_{\beta\tau\delta\alpha} \\ &\quad - \phi_{\beta\gamma\alpha\delta} - \phi_{\beta\alpha\gamma\delta} - \phi_{\alpha\beta\delta\gamma} - \phi_{\beta\alpha\delta\gamma} - \phi_{\beta\alpha\delta\gamma})\end{aligned}\quad (\text{A.8})$$

$$\begin{aligned}\phi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{Y_7^{[22]}} &= Y_7^{[22]} \phi_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{12} (\phi_{\alpha\beta\gamma\delta} + \phi_{\beta\alpha\gamma\delta} + \phi_{\alpha\beta\delta\gamma} + \phi_{\beta\alpha\delta\gamma} + \phi_{\tau\beta\alpha\delta} + \phi_{\beta\tau\alpha\delta} + \phi_{\delta\tau\beta\alpha} \\ &\quad - \phi_{\beta\gamma\alpha\delta} - \phi_{\beta\alpha\gamma\delta} - \phi_{\alpha\beta\delta\gamma} - \phi_{\beta\alpha\delta\gamma} - \phi_{\beta\alpha\delta\gamma})\end{aligned}\quad (\text{A.9})$$

$$\begin{aligned}\phi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{Y_8^{[22]}} &= Y_8^{[22]} \phi_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{12} (\phi_{\alpha\beta\gamma\delta} + \phi_{\tau\beta\alpha\delta} + \phi_{\alpha\tau\beta\delta} + \phi_{\tau\beta\alpha\delta} + \phi_{\beta\tau\alpha\delta} + \phi_{\beta\alpha\tau\delta} + \phi_{\delta\tau\beta\alpha} \\ &\quad - \phi_{\beta\gamma\alpha\delta} - \phi_{\beta\alpha\gamma\delta} - \phi_{\alpha\beta\delta\gamma} - \phi_{\beta\alpha\delta\gamma} - \phi_{\beta\alpha\delta\gamma})\end{aligned}\quad (\text{A.10})$$

$$\begin{aligned}\phi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{Y_9^{[22]}} &= Y_9^{[22]} \phi_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{24} (\phi_{\alpha\beta\gamma\delta} + \phi_{\beta\alpha\gamma\delta} + \phi_{\beta\alpha\delta\gamma} + \phi_{\gamma\beta\alpha\delta} + \phi_{\gamma\alpha\beta\delta} + \phi_{\beta\gamma\alpha\delta} \\ &\quad + \phi_{\alpha\gamma\beta\delta} + \phi_{\alpha\beta\delta\gamma} + \phi_{\alpha\beta\gamma\delta} + \phi_{\beta\alpha\gamma\delta} + \phi_{\beta\alpha\delta\gamma} + \phi_{\beta\gamma\alpha\delta} + \phi_{\beta\delta\alpha\gamma} \\ &\quad + \phi_{\gamma\beta\alpha\delta} + \phi_{\gamma\alpha\beta\delta} + \phi_{\beta\gamma\alpha\delta} + \phi_{\beta\delta\alpha\gamma} + \phi_{\beta\alpha\gamma\delta} + \phi_{\beta\alpha\delta\gamma} + \phi_{\beta\gamma\alpha\delta} + \phi_{\beta\delta\alpha\gamma})\end{aligned}\quad (\text{A.11})$$

- [1] B. (19) He
- [2] 张
- [3] 王
- [4] C.
- [5] E.
- [6] M.
- [7] M.
- [8] M.
- [9] D.
- [10] T.
- [11] H.
- [12] S. ren

In 1 method for ${}_{AA}^A\text{H}$, ${}_{AA}^A\text{He}$ for ${}_{AA}^A\text{H}$ that the

有关的, 因
 $T = 0, L$

且二者 J^* 相

参 考 文 献

- [1] B. F. Gibson & D. R. Lehman, *Nucl. Phys.*, A329(1979), 308; C. D. Dover, *Nucl. Phys.*, A335 (1980), 227; R. H. Dalitz & G. Rajasekaran, *Nucl. Phys.*, 50(1964), 450; Y. C. Tang & R. C. Herndon, *Phys. Rev.*, 138(1965), B637.
- [2] 张禹顺, 王淮淮, 李扬国, 陈晓天, 阮图南, 高能物理与核物理, 5(1981), 149.
- [3] 王如琳, 潘铸智, 张禹顺, 王淮淮, 高能物理与核物理, 5(1982), 588.
- [4] C. Itzykson & M. Nauenberg, *Rev. Mod. Phys.*, 38(1966), 95.
- [5] E. P. Wigner, *Phys. Rev.*, 51(1937), 106.
- [6] M. Gell-Mann, *Phys. Rev.*, 125(1962), 1067; S. Okubo, *Progr. Theoret. Phys.*, 27(1962), 949.
- [7] M. Bedjidian et al., *Phys. Lett.*, B62(1976), 62.
- [8] M. Danysz et al., *Nucl. Phys.*, 49(1963), 121.
- [9] D. J. Prowse, *Phys. Lett.*, 17(1966), 782.
- [10] T. C. Tang & R. C. Herndon, *Phys. Rev. Lett.*, 14(1965), 991.
- [11] H. Nakamura, *Progr. Theoret. Phys.*, 30(1963), 84.
- [12] S. Nakaiichi & Y. Akaishi, Contributed Papers in Proceedings of the Ninth International Conference on the Few Body Problem, Eugene, Oregon. August 17—23, 1980 Volume II 30(S-56).

(A.1)

(A.2)

THE SPECTROSCOPY OF FOUR-BARYON SYSTEM

(A.3)

WANG WEI-WEI

(Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica)

(A.4)

ZHANG YU-SHUN PAN JI-ZHI WANG RU-LING

(Institute of High Energy Physics, Academia Sinica)

(A.5)

ABSTRACT

In this paper, using $SU(6)$ symmetry theory four-baryon system is discussed and a method of analyzing experimental spectra is provided. Because of the ground states of $^{1A}_AAH$, $^{1A}_AAHe$, $^{1A}_AH$, $^{1A}_AHe$ and ^{1A}He are in the same I.R. of $SU(6)$, one can derive masses for $^{1A}_AAH$ and $^{1A}_AAHe$ from the experimental data of $^{1A}_AH$, $^{1A}_AHe$ and ^{1A}He . Calculation shows that these $J^* = 0^+$ double A hypernuclei $^{1A}_AAH$ and $^{1A}_AAHe$ are not likely bound states.

(A.6)

$$\delta_{\beta\alpha\beta} + \phi_{\beta\gamma\beta\alpha}$$

$$\gamma_{\beta\alpha} - \phi_{\beta\gamma\beta\alpha}(A)$$

$$\delta_{\beta\alpha\beta\gamma} + \phi_{\beta\gamma\beta\alpha}$$

$$\beta\gamma - \phi_{\beta\gamma\beta\alpha}(A)$$

$$\delta_{\beta\alpha\gamma}$$

$$\gamma\beta\alpha\delta$$

$$\tau\beta\beta\alpha$$

(A.7)