第6卷 第1期 高能物理与核物理 Vol. 6, No. 1
1982年1月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS Jan., 1982

一个引入规范场的方法

刘耀阳
(中国科学技术大学)

摘　要

通常关于规范场的讨论是以波函数为基础进行的．用这个方法研究旋量粒子在引力场中的行为时，遇到了波函数在广义座标变换下为标量的著名问题．本文提出以代数结构，Lie 代数或 Jordan 代数为基础讨论规范场的方法，引入了一个代数表示群的概念，把波函数的表示问题同表示群联系起来．表示群可以是整体的，也可以是定域的，分别与波函数的整体和定域变换相对应．按照这种方法研究规范场的问题发现，对于杨-Mills 场这类涉及内部自由度的问题，给出的结果和常规的方法一致．借助于改变代数结构对旋量粒子引进引力，发现象 Weyl 所用的vierbein 不再出现，波函数也不再表现为标量，而是以和 Dirac 理论相一致的方式进行变换．进一步的问题也作了讨论．

一、引　言

爱因斯坦引力理论给我们提供一个非常好的范例，他把作用力同时空性质联系起来．杨-Mills 给我们提供另一个范例[1]，即把基本粒子之间的相互作用和某种内部空间性质联系起来．杨-Mills 理论最吸引人的地方在于其可重整性，这样就促使人们去尝试按照规范场的观点去看待引力问题．在经典理论中，没有类似于同位旋这种内部自由度，但是在 Dirac 理论中却存在着本征自旋E反粒子这种经典理论所没有的内部自由度．按照这个思路，最早从事这项工作的是 Utiyama[2]．为了和杨-Mills 场的讨论完全平行地进行，他引用了 Weyl[3] 的标架 (vierbein) 概念，其所导致的一个后果是波函数在广义座标变换下是标量．关于这一点有着各种尖锐的批评，并被认为是引力理论一个很丑的方面[4]．

通常关于规范场的讨论是从波函数出发，研究定域变换下理论的行为．本文试图改变问题的提法，其想法是基于这样一个事实：无穷小算符对应于观测量，如在杨-Mills 理论中τ_i是同位旋算符，在 Dirac 理论中β、γ^μ是速度算符[5]．所谓量子效应在数学上便表现为这些算符的代数行为，弄清楚了它们全部的代数行为也就弄清楚了全部量子效应．于是问题归结到一个代数求解问题．全部代数解由一组变换给出，这组变换构成一个群．Lie 代数的情况，这个群就是原来群的正则表示．Jordan 代数的情况比较复杂，可以证明存在这样的群，并有一个子群，这个子群就是 Lorentz 群，若仅限于子群上考虑，它就是

本文 1979 年 4 月 3 日收到．1980 年 7 月 5 日收到修改稿．

Lorentz 群的旋量表示.

第二节中,我们把这个方法应用到杨-Mills 场问题上,发现这个方法和常规的方法是等价的,所给出的群参数明显地看出 $SU(2)$ 的紧致性. 第三节讨论旋量粒子在引力场中的行为. 若限于 Lorentz 子群, 所得结果形式上和以往得到的等价, 但物理内容是不同的. 这里不再需要标架,波函数也不再是标量. 所给出的群参数,使我们明显地看出群的非紧致性,这种非紧致性会给引力场的量子化和重整化带来麻烦.

二、 杨-Mills 场

考虑一个场 ϕ, 它是 $SU(2)$ 群的表示,在群变换下

$$\phi \to \phi = u(\theta)\phi',$$

$$u(\theta) = e^{[\tau_i,\tau_j]\theta_{ij}} = e^{i\tau_i\theta_i}, \tag{1}$$

$$[\tau_i, \tau_j] = i\varepsilon_{ijk}\tau_k, \quad \theta_i = \varepsilon_{ijk}\theta_{jk}. \tag{2}$$

其中 θ 是常数. 当人们研究全部群的变换时, 只要使 θ 取任意常数就够了, 但要记住一点,这么作的时候已假定 (1) 中出现的 τ_i 是 (2) 的一个特定的解. 我们要问, 取 (2) 的不同解代入 (1) 会发生什么情况? 显然若 τ_i 是 (2) 的解,则

$$\begin{aligned} \tau'_i &= u(\rho)\tau_i u^+(\rho) = [R^+(\rho)]_{ij}\tau_j, \\ R(\rho) &= e^{[F_i F_j]\rho_{ij}} \end{aligned} \tag{3}$$

也是 (2) 的解. 其中 ρ 是任意常数, F_i 是 τ_i 的正则表示, $R(\rho)$ 是群的正则表示. (3)解释为把 τ_i 看作群的作用空间,对应的群表示是群的正则表示. 把 (3) 代人 (1),可看出一个确定群的元素能用不同的无穷小算符表示出来,只要群参数间满足下面关系

$$e^{i\tau_i\theta_i} = e^{i\tau'_i\theta'_i}, \quad \theta' = R(\rho)\theta, \quad \theta = \begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ \theta_3\end{pmatrix}. \tag{4}$$

现在把 θ 固定,让 τ_i 跑遍所有 (2) 的解, 求群的覆盖情况. 所有 τ_i 的解就是在 (3) 中取所有 ρ 的实数值,再由 (4) 得,

$$\begin{aligned} u(\theta) &\to u(\rho)u(\theta)u^+(\rho) = u(R(\rho)\theta), \\ \widetilde{R(\rho)\theta}\, R(\rho)\theta &= \tilde{\theta}\theta. \end{aligned} \tag{5}$$

上式告诉我们,把 θ 看作欧氏空间的矢量, R 是一个转动. 如选择只有 θ_3 不为零, 则以第三轴为转动轴的转动对 θ 不产生影响,因此实际上 $R(\rho)$ 中有效参数少一个,加上 θ_3 本身作为一个参数, (5) 的实际群参数是三个,这正是 $SU(2)$ 所要求的. 考虑到 $e^{i\tau_3\theta_3}$ 的周期性,选择 $-\pi \leqslant \theta_3 \leqslant \pi$, (5) 式给出群参数的变化范围是以 π 为半径的三维欧氏球. 另外数学上已严格证明 $SU(2)$ 的群参数是三维欧半径为 π 的球[6], 这样就证明了群元素能够由绕某一个轴的转动和无穷小算符的全体来描述, 并且等价于通常的整体变换. 群参数在有限区域变化的性质叫做紧致性.

上面讨论中所说的 τ_i 解的全体实际上并不是真正解的全体, 把 ρ 换成任意时空函数 $\rho(x)$, (3) 仍旧满足对易关系 (2). 很自然地希望把不变性的要求扩展到包括 τ_i 的定域

表示，进而假定 θ_3 是绕第三轴的定域转动 $\theta_3(x)$，有

$$\cancel{u(\theta(x)) \to u(\rho(x))}\, u(\theta(x))u^+(\rho(x)) = u(R(\rho(x))\theta(x)),$$

$$R(\rho(x))\theta(x)\ R(\rho(x)\theta(x)) = \tilde{\theta}(x)\theta(x). \tag{6}$$

同样的理由，$u(R(\rho(x))\theta(x))$ 对全体 $\rho(x)$ 和 $\theta_3(x)$ 求和等价于通常的定域变换.

根据定域规范变换的观点，杨–Mills 得到一个新的场，在这里我们看到了，它是和力学量表示的不定性相联系的.

三、引力场中的 Dirac 粒子

上一节，以杨–Mills 场为例说明了我们的方法和通常方法的等价性，这一节用来讨论 Dirac 粒子问题，它是本文的中心. 自由 Dirac 粒子的拉氏函数是

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\{i\bar{\phi}(x)\gamma^a\partial_a\phi(x) + \mathrm{h\cdot c}\}, \tag{7}$$

$$\{\gamma^a, \gamma^b\} = 2g^{ab}. \tag{8}$$

为了简单，略去了质量项. 我们采用 Bjorken 度规，g^{ab} 是 Minkowski 度规张量[7]. $\mathscr{L}$ 不变的 Lorentz 变换是

$$\chi^a \to \chi^a = L(\eta)^a{}_b x'^b, \quad L(\eta) = e^{\eta}, \tag{9}$$

$$\phi(x) \to \phi(x) = S(\eta)\phi'(x'), \quad S(\eta) = e^{\frac{i}{4}\sigma^a{}_b\eta^b{}_a}, \tag{10}$$

$$\gamma^a \to \gamma^a = \gamma'^a, \tag{11}$$

这些是大家熟悉的结果. 而如果认真对待 (8) 式时就会发觉，g^{ab} 在变换 (9) 下不变很好理解，而 γ^a 不变的 (11) 式便不好理解了.

这需要再考查 (7) 式. 照习惯在写下 (7) 时，理解为 γ^a 是 $\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ 四个矩阵，$\bar{\phi} = \phi^+\beta$ 而且 $\beta = \gamma^0$. 实际上，β 是一个固定的矩阵如 $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$，而一般说来 γ^0 不一定等于 β 但可以等于 β. 那么究竟 γ^a 应当怎么取，这个问题首先为 Pauli 研究[8]. 他指出 Dirac 矩阵 $\boldsymbol{\alpha}$, β 解不唯一，要保持 $\boldsymbol{\alpha}$, β 的厄米性，不同解之间能相差一个相似变换或酉变换[5]，

$$\alpha'^k = U\alpha^k U^+, \quad \beta' = U\beta U^+, \quad UU^+ = 1. \tag{12}$$

这当然没有多大兴趣. 但保持 $\boldsymbol{\alpha}\,\beta$ 厄米性的变不必需是酉的，记为 V，只要满足

$$\alpha^i \to \alpha^i = (V^{-1})^+\alpha'^i V^{-1} \quad \beta \to \beta = (V^{-1})^+\beta' V^{-1} = \beta'. \tag{13}$$

或将上式改写成协变的形式，$\mathscr{L}$ 不变的变换是

$$\chi^a \to \chi^a = \chi'^a, \quad \gamma^a \to \gamma^a = V\gamma'^a V^{-1}, \quad \phi(x) \to \phi(x) = V\phi'(x). \tag{14}$$

其中 V 可表示为

$$V = e^{[\Gamma^l, \Gamma^m]\theta^{lm}}, \quad \Gamma^l = [\Gamma^l]^+,$$

$$\Gamma^1 = -i\gamma^1, \quad \Gamma^2 = -i\gamma^2, \quad \Gamma^3 = -i\gamma^3, \quad \Gamma^4 = \gamma^0$$

$$\Gamma^5 = -\gamma^1\gamma^5, \quad \Gamma^6 = -\gamma^2\gamma^5 \quad \Gamma^7 = -\gamma^3\gamma^5, \quad \Gamma^8 = -i\gamma^0\gamma^5$$

$$\Gamma^9 = \frac{i}{2}[\gamma^2, \gamma^3], \quad \Gamma^{10} = \frac{i}{2}[\gamma^3, \gamma^1], \quad \Gamma^{11} = \frac{i}{2}[\gamma^1, \gamma^2], \tag{15}$$
$$\Gamma^{12} = \frac{-1}{2}[\gamma^0, \gamma^1], \quad \Gamma^{13} = \frac{-1}{2}[\gamma^0, \gamma^2], \quad \Gamma^{14} = \frac{-1}{2}[\gamma^0, \gamma^3],$$
$$\Gamma^{15} = -\gamma^5.$$

考虑到 Γ^l 之间的对易关系

$$[\Gamma^l, \Gamma^m] = iF^{lmn}\Gamma^n,$$
$$[\Gamma^l, \Gamma^m]\theta^{lm} = i\Gamma^l\theta^l, \quad \theta^l = F^{lmn}\theta^{mn} \tag{16}$$

F^{lmn} 是实的全反对称结构常数，只要要求 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_8, \theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{14}, \theta_{15}$ 是虚数，$\theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7, \theta_9, \theta_{10}, \theta_{11}$ 是实数就能满足条件 (13). 类似于 (3) 的结果是

$$\Gamma'^l = V^{-1}\Gamma^l V = [e^{iF^l\theta^l}]_{lm}\Gamma^m = R(\theta)^{lm}\Gamma^m,$$
$$(F^l)^{mn} = -iF^{lmn}, \quad R(\theta) = e^{iF^l\theta^l}. \tag{17}$$

把 Γ^l 换为 γ^a，便得到 γ 矩阵之间的变换关系. 所以变换(14)是一个 γ 矩阵之间的正交变换，变换矩阵 $R(\theta)$ 构成群，我们叫它为 γ 矩阵的表示变换群. $\Gamma^9, \Gamma^{10}, \Gamma^{11}, \Gamma^{12}, \Gamma^{13}, \Gamma^{14}$ 实际上是 Lorentz 群的无穷小算符，所以 V 有一个 Lorentz 子群. 值得强调的是，变换之前 ψ 和 $\bar{\psi}$ 以及变换之后 ψ' 和 $\bar{\psi}'$ 之间的关系由同一个 β 表示

$$\bar{\psi} = \psi^+\beta, \quad \bar{\psi}' = \psi'^+\beta. \tag{18}$$

但是若变换之前 $\gamma^0 = \beta$，变换之后的 γ'^0 不一定等于 β，要根据 (17) 定出 γ'^0.

Lorentz 座标变换和 γ 矩阵表示变换不变性，使我们可以考虑一个特别的不变变换

$$\chi^a \to \chi^a = L(\eta)^a{}_b\chi'^b,$$
$$\psi(x) \to \psi(x) = S(\eta)V(\theta)S^{-1}(\eta)\psi'(x'), \tag{19}$$
$$\Gamma^l \to \Gamma^l = L(\eta)^l{}_m R(\theta)_n{}^m\Gamma'^n.$$

其中 $L(\eta)^l{}_m$ 是以 $\Gamma^1\cdots\Gamma^{15}$ 作为基的 Lorentz 座标变换的表示，它是可约的. (19) 是自由 Dirac 粒子整体连续对称性全部结果，因为 S 和 V 是两个独立的群，适当调节两个群参数，就能得到全部 Dirac 方程对称性变换. 如果限于 V 的 Lorentz 子群，并且取 $\theta = \eta$，便有 $\gamma^a = \gamma'^a$，这就是通常 Dirac 理论 Lorentz 变换的结果 (11). 本节一开始提出的问题得到了回答，那只是一般情况 (19) 极特殊的情况.

回头再研究 V 变换. 仿照 $SU(2)$，V 的任意元素由某一组元素经无穷小算符全体表示有

$$V(\theta) \to V(\rho)V(\theta)V^{-1}(\rho) = V(R(\rho)\theta) = V(\theta'),$$
$$\tilde{\theta}'\theta' = \tilde{\theta}\theta, \quad \tilde{\theta} = (\theta^1, \theta^2, \cdots\theta^{15}) \quad \theta' = R(\rho)\theta. \tag{20}$$

把 θ 看作 7 个空间性座标 8 个时间性座标的 Minkowski 空间，$R(\rho)$ 相当于这个空间的正交变换. 相互对易的无穷算符有三个，可选为 $\Gamma^{11}, \Gamma^{14}, \Gamma^{15}$, $V(\theta) = e^{i(\Gamma^{11}\theta^{11}+\Gamma^{14}\theta^{14}+\Gamma^{15}\theta^{15})}$. 再把 $R(\rho)$ 中对应 $\Gamma^{11}, \Gamma^{14}, \Gamma^{15}$ 的转动挑出来，它们对 θ 不产生影响，则 $R(\rho)$ 中有效的群参数等于 12，加上 $\theta^{11}, \theta^{14}, \theta^{15}$ 总数正好 15，这就是说群的元素的确可以经 $V(\theta)$ 和 $R(\rho)$ 全体或无穷小算符全体表示出来. θ^{11} 是实数，因为周期性，其变化区间是 $-\pi \to \pi$，$\theta^{14}\theta^{15}$ 是虚数，其变化区间是 $-i\infty \to i\infty$，数学上叫非紧致性. 总共 8 个虚参数，每个都产生非紧致性，这说明这个群和 $SU(2)$ 群很大的不同.

上面结果显示出，为了得到群变换可以从一些群元素出发，经对生成元求和得到全体群元素. 初看起来这么作似乎没有必要，因为对 $SU(2)$ 和 $V(\theta)$ 都没给出新结果，但也只能说对 $SU(2)$ 和 $V(\theta)$ 是这样，当考虑到 $L(\eta)$ 推广时情况就不同了. 记住了这一点，以后为了书写简便，把 $V(\rho)V(\theta)V^{-1}(\rho)$ 直接写为 $V(\theta)$，θ 是 15 个独立群参数.

把 Dirac 粒子本征自旋和正反粒子看作四个内部自由度，$V(\theta)$ 看作内部自由度变换，根据规范场的精神引入定域变换

$$\begin{aligned} \chi^a \to \chi^a &= L(\eta)^a{}_b x'^b, \\ \phi(x) \to \phi(x) &= S(\eta)V(\theta(x))S^{-1}(\eta)\phi'(x'), \\ \Gamma^l \to \Gamma^l &= L(\eta)^l{}_m R(\theta(x))_n{}^m \Gamma'^n. \end{aligned} \tag{21}$$

为保持 $\mathscr{L}$ 不变，必须把普通微分换为协变微分，但还不够，γ^a 也要作变换，新的 γ'^a 不再是常数. 这便促使我们把 γ^a 看作场. 本文暂限于 V 的 Lorentz 子群情况，这时 (21) 退化为

$$\begin{aligned} \chi^a \to \chi^a &= L(\eta)^a{}_b x'^b, \\ \phi(x) \to \phi(x) &= S(\eta)S(\theta(x))S^{-1}(\eta)\phi'(x'), \\ \gamma^a \to \gamma^a &= [L(\eta)L^{-1}(\theta(x))]^a{}_b \gamma'^b. \end{aligned} \tag{22}$$

并且

$$S(\eta)S(\theta(x))S^{-1}(\eta) = e^{-\frac{1}{8}[L(\eta)_{a'}{}^a\gamma^{a'},\, L(\eta)^{b'}{}_b\gamma_{b'}]\theta(x)^b{}_a}, \tag{23}$$

上式表示，Lorentz 座标变换表现为把 γ 矩阵看作普通空间的矢量进行变换，也就是说对旋量表示 Lorentz 座标变换求和化为对四维矢量的 Lorentz 座标变换求和. 这一点非常重要，因为根据前面讨论 $SU(2)$ 和 $V(\theta)$ 的经验，使我们有理由经过修改对易关系而引进广义座标变换，就是说认为代数结构是根本的. 已经知道 Lorentz 变换不改变 Jordan 代数结构，而广义座标变换将改变 Jordan 代数结构. 所以我们假定，把 (22) 推广到广义座标变换时经过以下步骤，首先是 (8) 推广为

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \tag{24}$$

由于 γ^μ 和 $g^{\mu\nu}$ 是 χ 的函数，我们把拉丁指标换为希腊指标，不进行座标变换而只有 γ 矩阵表示变换的情况假定为

$$\begin{aligned} &\chi^\mu \to \chi^\mu = \chi'^\mu, \\ &\phi(x) \to \phi(x) = \Lambda(\theta)\phi'(x), \quad \Lambda(\theta) = e^{\frac{i}{4}\sigma^\mu{}_\nu\theta^\nu{}_\mu} \end{aligned} \tag{25}$$

我们来求为保持 $\mathscr{L}$ 不变 γ 的变换性质，由 Λ

$$\sigma^\mu{}_\nu\theta^\nu{}_\mu = \sigma^{\mu\nu}\theta_{\nu\mu}, \quad \theta_{\mu\nu} = -\theta_{\nu\mu}, \tag{26}$$

得

$$\begin{aligned} &\theta^\nu{}_\mu = g^{\nu\alpha}\theta_{\alpha\mu}, \quad \theta_\mu{}^\nu = g^{\nu\alpha}\theta_{\mu\alpha}, \\ &\theta^\nu{}_\mu = -\theta_\mu{}^\nu = -g_{\mu\alpha}\theta^\alpha{}_\beta g^{\beta\nu}. \end{aligned} \tag{27}$$

再由 (24) 可导出 γ^μ 与 $\sigma^\mu{}_\nu$ 的对易关系，

$$[\gamma^\mu, \sigma^\nu{}_\rho] = 2i[g^{\mu\nu}\gamma_\rho - g^\mu{}_\rho\gamma^\nu]. \tag{28}$$

利用 (26)、(27)、(28)，并注意经 $g^{\mu\nu}$ 升降指标可证

$$\Lambda^{-1}\gamma^\mu\Lambda = L(\theta)^\mu{}_\nu\gamma^\nu, \quad L_\mu{}^\nu = (L^{-1})^\nu{}_\mu \tag{29}$$

因此得到 γ^μ 的变换关系

$$\gamma^\mu \to \gamma^\mu = L\theta_\nu{}^\mu\gamma'^\nu, \tag{30}$$

将 (24) 左右各作用 Λ^{-1} 和 Λ 得

$$g^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\Lambda^{-1}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}\Lambda = \frac{1}{2}\{\gamma'^\mu, \gamma'^\nu\} = g'^{\mu\nu}. \tag{31}$$

就是说 Lorentz 变换不改变度规张量.

下面把广义座标变换看作一个平移群[4]，它只作用到无穷小算符上，则包括广义座标变换的变换关系是

$$\begin{cases} \chi^\mu \to \chi^\mu = \chi^\mu(x'), \\ \phi(x) \to \phi(x) = \exp\left\{-\frac{1}{8}\left[\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^{\mu'}}\gamma^{\mu'}, \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x'^\nu}\gamma_{\nu'}\right]\theta(x)^\nu{}_\mu\right\}\phi'(x') \\ \qquad\qquad = \Lambda(\theta')\phi'(x'), \\ \Lambda(\theta') = \exp\left\{\frac{i}{4}\sigma^\mu{}_\nu\theta'^\nu{}_\mu\right\}, \\ \theta'^\nu{}_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\alpha}\theta^\alpha\beta\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\mu}. \end{cases} \tag{32}$$

为求 γ^μ 的变换关系，先求

$$\Lambda^{-1}(\theta')\gamma^\mu\Lambda(\theta') = L(\theta')^\mu{}_\nu\gamma^\nu,$$
$$L(\theta')^\mu{}_\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}L(\theta)^\alpha{}_\beta\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu}. \tag{33}$$

把上式中 $\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}$ 并到微分算符上组成不变量，则得到

$$\gamma'^\mu = L(\theta)^\mu\alpha\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta}\gamma^\beta, \text{ 或 } \gamma^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}L(\theta)_\beta{}^\alpha\gamma'^\beta. \tag{34}$$

将 (24) 左右各作用以 $\Lambda^{-1}(\theta')$ 和 $\Lambda(\theta')$ 得

$$g^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\Lambda^{-1}(\theta')\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}\Lambda(\theta') = \frac{1}{2}\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta}\{\gamma'^\alpha, \gamma'^\beta\}$$
$$= \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta}g'^{\alpha\beta},$$
$$g'^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\{\gamma'^\alpha, \gamma'^\beta\}, \tag{35}$$

(35) 正是我们所期望的结果.

公式 (32) 清楚地显示出波函数的旋量性质以及变换矩阵对两个独立群参数的依赖关系，因为根本就没有用到标架，所以可以得出结论，标架在讨论 Dirac 粒子的引力行为时完全是人为的因素，这些是和以往讨论不同的[2,4,9]. 不过可以证明，形式上又是等价的. 为此把 γ^μ 用标架场展开

$$\gamma^\mu = e^\mu{}_a\gamma^a, \quad \gamma_\mu = e_\mu{}^b\gamma_b,$$
$$\Lambda(\theta') = e^{\frac{i}{4}\sigma^a{}_b\theta^b{}_a}, \tag{36}$$

$$\theta^b{}_a = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x'^\nu} e^{\mu'}{}_a e_{\nu'}{}^b \theta^\nu{}_\mu.$$

可以证明

$$\begin{aligned}
(\theta\cdots\theta)^b{}_a &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x'^\nu} e^{\mu'}{}_a e^b{}_{\nu'} (\theta\cdots\theta)^\nu{}_\mu, \\
L(\theta)^b{}_a &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x'^\nu} e^{\mu'}{}_a e_{\nu'}{}^b L(\theta)^\nu{}_\mu, \\
L(\theta)^\mu{}_\nu &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x'^\nu} e^{\mu'}{}_a e_{\nu'}{}^b L(\theta)^a{}_b,
\end{aligned} \tag{37}$$

代人 (34) 得

$$\gamma'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} e^\nu{}_a L(\theta)^a{}_b \gamma^b. \tag{38}$$

这便是标架场的结果.

建立在标架场基础上的引力理论，已为许多人讨论过[9,4]，完全相似地不用标架概念也可以建立起引力理论，而且 Dirac 波函数是旋量，在此不准备重复. 从上面的讨论，自然会得到一个概念，即所谓 Dirac 波函数的旋量行为实质上是 γ 矩阵作为速度观测量算符表示的行为，设想不考虑 γ 矩阵的表示群变换而只考虑时空座标变换，波函数的旋量行为就根本表现不出来. 因此本文提出的问题和标架场理论物理上并不等价.

最后要提到，弄清楚 Dirac 波函数在广义座标变换下的不同行为有没可观测效应是非常有兴趣的. 我们也希望知道，和标架场比较当进行量子化和重整化时是否是相同的，因为我们知道，相当于标架场理论的定域 Lorentz 变换实际上是十个独立函数. 另外，只讨论 γ 矩阵表示变换 V 的 Lorentz 子群也是不完全的. 这些问题将另行讨论.

我要感谢和阎沐霖同志有益的讨论.

参　考　文　献

[1] C. N. Yang and R. Mills, *Phys. Rev.*, **96**(1954), 191.
[2] R. Utiyama, *Phys. Rev.*, **101**(1956), 1597.
[3] H. Weyl, *Zeits. Phys.*, **56**(1929), 330; D. Brill and J. A. Wheeler, *Rev. Mod. Phys.*, **59**(1957), 465.
[4] M. J. G. Veltman, "Method in Field Theory", Eds. R. Balian and J. Zin-Justin, 1976 (North-Holland, Amsterdam New York Oxford).
[5] P. A. M. Dirac, The Principles of Quantum Mechanics, 4th. ed. 1958 (Oxford Press).
[6] В. И. Сипрнов, Курс Высшей Математики, ТIII-1, ГИТТЛ, 1954 (Москва).
[7] J. D. Bjorken and S. D. Drell, Relativistic Quantum Fields, 1965 (McGraw-Hill Book Company).
[8] W. Pauli, *Ann. Inst. Poincaré*, **6**(1936), 106.
[9] C. J. Isham, A. Salam and J. Strathdee, *Lett. Nuovo Cim.*, **5**(1972), 969; C. Siraran and K. P. Sinha, *Lett. Nuovo Cim.*, **13**(1975), 357; *Phys. Rep.*, **51**(1979), 111.

A METHOD ON DERIVATION OF GAUGE FIELDS

LIU YAO-YANG
(*University of Science and Technology of China*)

ABSTRACT

Usually the study of gauge field is based on the wave function. By discussing the behaviour of Dirac particles in gravitation, one has a famous difficulty, that is, the wave functions appear as scalars under general coordinate transformations. In this paper, a method is suggested to constitute the gauge fields directly from algebraic structures, Lie algebra and Jordan algebra. We introduce a concept called representation group of algebras, the transformations of wave function are connected with the representation group. The global and local representation groups are connected with global and local transformations of wave function respectively. According to this method we find that it is equivalent to the usual one for all of the problems concerned with internal freedom as Yang-Mills field etc. For spinors, one can introduce gravitation by changing the algebraic structure, one find that the vierbein is unneccessary and the wave functions transform as spinors corresponding to Dirac theory. Some related problems are also discussed.