

束流包络函数方程及其近似解

魏开煜

(中国科学院高能物理研究所)

摘 要

本文给出了普遍的规一化束流包络函数方程,这种方程可以用来描述加速系统和传输系统中相对论束流及非相对论束流的包络和发射度形状的变化。

文中阐述了在考虑加速过程和束流空间电荷效应的情况下,这些包络函数方程的近似求解方法,导出了近似解的表达式。

一、引 言

1959年,卡普金斯基(M. Kapchinskij)和弗拉季米尔斯基(V. V. Vladimirkij)首次提出了非相对论的束流包络方程^[1],在六十和七十年代中,束流包络方程得到了进一步的应用和发展。例如,人们用包络方程来研究直线加速器低能端的空间电荷影响和初始运行参数的选择^[2,3],计算重离子束流传输系统^[4];把均方根概念引入包络方程^[5,6],进一步发展了相对论的非规一化包络方程^[7]……等等。迄今人们所用的包络方程,都是直接以束流包络为方程的未知函数。所用的求解方法,除了对圆形截面的束流导出了个别简单聚焦场的表示式之外,绝大多数都是引用“光滑近似”^[11]去进行数值计算。

我们认为,采用规一化包络函数 $\beta_u(u=x, y, z)$ 的方程式,比直接采用包络方程具有更为普适的意义。因为包络函数 β_u 的方程对于加速系统和非加速系统、相对论束流和非相对论束流,均具有正则的形式。本文中,我们将给出规一化包络函数方程的普遍形式,并阐述在考虑加速过程和束流空间电荷效应的情况下,运用“逐步近似”和“阶梯近似”相结合的方法求解这些方程,导出函数 β_u 及束流包络 a_u 的近似表达式。

二、规一化包络函数方程

取系统的中心轨道为纵向坐标轴 Z ,沿束流前进的方向为正向。两个横向坐标轴 X 和 Y 分别在水平和铅垂面内垂直于中心轨道。对于束团,以 $z = Z - Z_c$ 表示任一粒子相对于束团中心 (Z_c) 的纵向偏离。定义 x, y, z 为粒子的规一化坐标,它们与粒子的实际坐标(或称非规一化坐标) X, Y, z 之间的关系为

$$x = \sqrt{r_s \beta_s} X, \quad y = \sqrt{r_s \beta_s} Y, \quad z = \sqrt{r_s^3 \beta_s} z. \quad (2.1)$$

式中

$$r_s = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_s^2}}, \quad \beta_s = \frac{v_s}{c},$$

v_s 是标准粒子的速度, c 是光速. 我们在文[8]中作了证明, 无论是周期或非周期、加速或非加速系统, 也无论是相对论或非相对论情况, 只要粒子在 U 方向所受的力 $f_U(U = X, Y, z)$ 不显含 U' , 并且分别是 U 的线性显函数, 那么, 束流在规一化相平面 (u, u') 上所占的相面积总是运动常数. 相面积的形状为对称椭圆, 它的边界方程为

$$\gamma_u u^2 - 2\alpha_u u u' + \beta_u u'^2 = \epsilon_u = \text{常数}, \quad u = x, y, z \quad (2.2)$$

这里 ϵ_u 为束流的规一化发射度. “'”表示对纵坐标 Z_s 微分. $\beta_u, \alpha_u, \gamma_u$ 是 Z_s 的函数, 它们之间有下列关系

$$\alpha_u = \frac{\beta_u'}{2}; \quad \gamma_u = (1 + \alpha_u^2)/\beta_u; \quad \beta_u \gamma_u - \alpha_u^2 = 1. \quad (2.3)$$

相椭圆(2.2)在 u 轴上的投影就是束流在 u 方向的规一化包络, 它的表示式为

$$A_u = u_{\max} = \sqrt{\epsilon_u \beta_u}, \quad u = x, y, z. \quad (2.4)$$

由(2.4)式和定义(2.1)可以得到束流的实际包络为

$$a_x = \frac{1}{\sqrt{\gamma_s \beta_s}} \sqrt{\epsilon_x \beta_x}, \quad a_y = \frac{1}{\sqrt{\gamma_s \beta_s}} \sqrt{\epsilon_y \beta_y}, \quad a_z = \frac{1}{\sqrt{\gamma_s^3 \beta_s}} \sqrt{\epsilon_z \beta_z}, \quad (2.5)$$

我们称 $\beta_u(u = x, y, z)$ 为束流的规一化包络函数. 在文[8]中我们导出了它的普遍方程式为

$$(\sqrt{\beta_u})'' + Q_u(Z_s) \sqrt{\beta_u} - \frac{1}{(\sqrt{\beta_u})^3} = 0, \quad u = x, y, z \quad (2.6)$$

系数 $Q_u(Z_s)$ 的表示式为

$$Q_x = -\frac{1}{m_0 c^2 \gamma_s \beta_s^2} \frac{\partial f_x}{\partial X} - \frac{1}{2} \frac{(\gamma_s \beta_s)''}{\gamma_s \beta_s} + \frac{1}{4} \frac{(\gamma_s \beta_s)'^2}{(\gamma_s \beta_s)^2}, \quad (2.7)$$

$$Q_y = -\frac{1}{m_0 c^2 \gamma_s \beta_s^2} \frac{\partial f_y}{\partial Y} - \frac{1}{2} \frac{(\gamma_s \beta_s)''}{\gamma_s \beta_s} + \frac{1}{4} \frac{(\gamma_s \beta_s)'^2}{(\gamma_s \beta_s)^2}, \quad (2.8)$$

$$Q_z = -\frac{1}{m_0 c^2 \gamma_s^3 \beta_s^2} \frac{\partial (f_z - f_{zs})}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{(\gamma_s^3 \beta_s)''}{\gamma_s^3 \beta_s} + \frac{1}{4} \frac{(\gamma_s^3 \beta_s)'^2}{(\gamma_s^3 \beta_s)^2}, \quad (2.9)$$

其中 m_0 为粒子的静止质量. 粒子所受的力 f_x, f_y, f_z , 包括加速元件和聚焦元件的电、磁场对粒子的作用力和束流自身的空间电荷力. 在线性近似下, 认为标准粒子处在束团的中心. 这时, f_{zs} 就是标准粒子所受的加速力, 束流的加速方程为

$$(\gamma_s^3 \beta_s)' = \frac{2\gamma_s}{m_0 c^2} f_{zs}. \quad (2.10)$$

三、包络函数的近似解

在考虑束流的加速过程和线性空间电荷效应的情况下, γ_s 和 β_s 由方程(2.10)确定为纵坐标 Z_s 的函数, f_x, f_y, f_z 不仅通过加速场和聚焦场依赖于 Z_s , 而且通过空间电荷力依赖于束流强度 I 和束流的实际包络 a_x, a_y 和 a_z . 因而, 在普遍情况下方程(2.6)的系数 Q_u 为下列形式的函数

$$Q_u = Q_u[Z, I, a_x(Z, I), a_y(Z, I), a_z(Z, I)]. \quad (3.1)$$

为简化起见，我们省去 Z_s 的下标 s 。首先，我们对束流强度 I 做“逐步近似”。令 $I = \mu \Delta I$ ， ΔI 为近似步长， $\mu = 0, 1, 2, \dots, k$ 为近似级数。当 ΔI 取得足够小时，相邻两级近似之间束流包络的差别不大，在此情况下，我们用第 $(\mu - 1)$ 级近似下所求得 的包络值 $a_{u, \mu-1}(Z) = a_u[Z, (\mu - 1)\Delta I]$ 去计算第 μ 级近似所用的 Q_u ，并记为

$$Q_{u\mu} = Q_u[Z, \mu \Delta I, a_{x, \mu-1}(Z), a_{y, \mu-1}(Z), a_{z, \mu-1}(Z)], \quad (3.2)$$

再对 Z 做“阶梯近似”。在有物理意义的范围内， $Q_{u\mu}$ 总是 Z 的单值有界函数。我们按照零级近似下函数 $Q_{u,0}$ 的始点、零点和终点将系统分为一系列大的区域，称为“元件”，以 n ($n = 1, 2, 3, \dots, N$) 表示元件的序号。在第 n 个元件中再分 m_n 个小区域，叫做“节”，节的序号以 j 表示 ($j = 0, 1, 2, \dots, m_n$)。这样一来， Z_{nj} ($n = 1, 2, 3, \dots, N, j = 0, 1, 2, \dots, m_n$) 就是“节”的端点的纵坐标。函数 $Q_{u,0}$ 的始点为 $Z_{1,0}$ ，终点为 Z_{N,m_N} ，零点依次为 $Z_{n+1,0} = Z_{n,m_n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots, N - 1$)。第 nj 个节的长度为 $Z_{nj} - Z_{n,j-1} = l_{nj}$ ，其中任一点的坐标 Z 满足 $Z_{nj} \geq Z \geq Z_{n,j-1}$ 。一般情况下， $Q_{u\mu}$ 定义域的始点和终点与 $Q_{u,0}$ 完全相同，但其零点的坐标因空间电荷效应稍有差别。因为函数 $Q_{u\mu}$ 是有界的，只要 l_{nj} 取得足够小，我们在每个节中以 $Q_{u\mu}$ 的平均值代替它在各点的值，所引起的误差总会缩小到所要求的限度。以 $\bar{Q}_{u\mu nj}$ 记这个平均值，有

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{u\mu nj} &= \frac{1}{l_{nj}} \int_{Z_{n,j-1}}^{Z_{nj}} Q_{u\mu} dZ \\ &\approx \frac{1}{2} (Q_{u\mu nj} + Q_{u\mu n,j-1}). \end{aligned} \quad (3.3)$$

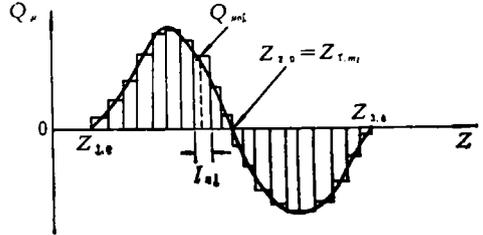


图 1 阶梯近似示意图

就是说，把连续函数 $Q_{u\mu}(Z)$ 在每个小区域上近似为一个阶梯，如图 1 所示。在此情况下，方程 (2.6) 就被近似为一系列定义在小区域上的常系数方程

$$\left. \begin{aligned} (\sqrt{\beta_u})'' + \bar{Q}_{u\mu nj} \sqrt{\beta_u} - \frac{1}{(\sqrt{\beta_u})^3} &= 0, \quad u = x, y, z, \\ Z_{nj} \leq Z \leq Z_{n,j-1}, \quad \mu &= 0, 1, 2, 3, \dots, k, \\ n = 1, 2, 3, \dots, N, \quad j &= 0, 1, 2, 3, \dots, m_n. \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

由于 $\bar{Q}_{u\mu nj}$ 在各节上分别为常数，方程 (3.4) 在每个节上都是可以精确求解的^[9]。只要求出了每个节上的解，利用 β_u 和 α_u 在节端点上的连续条件就可以得到整个系统的解。我们将所有的节分为三种标准类型：凡 $\bar{Q}_{u\mu nj} > 0$ 称为 u 方向的聚焦节； $\bar{Q}_{u\mu nj} < 0$ 为散焦节； $\bar{Q}_{u\mu nj} = 0$ 为漂移节。为书写方便起见，以下我们省去下标“ u ”，所得公式对 x, y, z 方向都适用。

将方程 (3.4) 乘以 $(\sqrt{\beta})'$ 就可以积分一次而降阶为

$$\frac{1}{2} \beta' = \pm \sqrt{-\bar{Q}_{\mu nj} \beta^2 + W_{\mu nj} \beta - 1}. \quad (3.5)$$

式中 $W_{\mu nj}$ 在每个节中为常数，它的表示式为

$$W_{\mu nj} = \bar{Q}_{\mu nj} \beta_{\mu n,j-1} + r_{\mu n,j-1} \quad (3.6)$$

方程 (3.5) 是可积分的。当 $\beta' > 0$ 时右端取正号， $\beta' < 0$ 时取负号； $\beta' = 0$ 时，得到 β

的极值方程

$$-\bar{Q}_{\mu nj} \beta_{\min}^2 + W_{\mu nj} \beta_{\min} - 1 = 0. \quad (3.7)$$

将方程(3.7)与(3.4)结合起来进行分析, 就可以得到, 对于聚焦节 (当 $\bar{Q}_{\mu nj} > 0$), 假如包络函数有极值的话, 可能是极大值, 也可能是极小值, 它们分别为

$$\beta_{\max} = \frac{W_{\mu nj} + \sqrt{W_{\mu nj}^2 - 4\bar{Q}_{\mu nj}}}{2\bar{Q}_{\mu nj}} \quad (3.8)$$

及

$$\beta_{\min} = \frac{W_{\mu nj} - \sqrt{W_{\mu nj}^2 - 4\bar{Q}_{\mu nj}}}{2\bar{Q}_{\mu nj}}. \quad (3.9)$$

对散焦节 ($\bar{Q}_{\mu nj} < 0$). 假如包络函数有极值的话, 只可能是极小值, 它的表示式为

$$\beta_{\min} = \frac{\sqrt{W_{\mu nj}^2 - 4\bar{Q}_{\mu nj}} - W_{\mu nj}}{-2\bar{Q}_{\mu nj}}. \quad (3.10)$$

对于漂移节, 假如包络函数有极值的话, 也只可能是极小值, 表示式为

$$\beta_{\min} = \frac{1}{\gamma_{\mu nj-1}}. \quad (3.11)$$

求解方程(3.5), 注意在 β 的极值前方程的右端取不同的符号, 并注意运用上述 β 极值的表示式, 就可以得到 β 函数在节 $Z_{nj} \leq Z \leq Z_{nj-1}$ 中的表达式

1. 对聚焦节 ($\bar{Q}_{\mu nj} > 0$) 有

$$\beta = \frac{W_{\mu nj}}{2\bar{Q}_{\mu nj}} + \frac{\sqrt{W_{\mu nj}^2 - 4\bar{Q}_{\mu nj}}}{2\bar{Q}_{\mu nj}} \sin \left[2\sqrt{\bar{Q}_{\mu nj}}(Z - Z_{nj-1}) + \sin^{-1} \left(\frac{2\bar{Q}_{\mu nj} \beta_{\mu nj-1} - W_{\mu nj}}{\sqrt{W_{\mu nj}^2 - 4\bar{Q}_{\mu nj}}} \right) \right], \quad \text{当 } \alpha_{\mu nj-1} > 0 \quad (3.12)$$

$$\beta = \frac{W_{\mu nj}}{2\bar{Q}_{\mu nj}} + \frac{\sqrt{W_{\mu nj}^2 - 4\bar{Q}_{\mu nj}}}{2\bar{Q}_{\mu nj}} \sin \left[\sin^{-1} \left(\frac{2\bar{Q}_{\mu nj} \beta_{\mu nj-1} - W_{\mu nj}}{\sqrt{W_{\mu nj}^2 - 4\bar{Q}_{\mu nj}}} \right) - 2\sqrt{\bar{Q}_{\mu nj}}(Z - Z_{nj-1}) \right], \quad \text{当 } \alpha_{\mu nj-1} \leq 0 \quad (3.13)$$

2. 对散焦节 ($\bar{Q}_{\mu nj} < 0$) 有

$$\beta = \frac{[B_{\mu nj} e^{2\sqrt{-\bar{Q}_{\mu nj}}(Z - Z_{nj-1})} - W_{\mu nj}]^2 - 4\bar{Q}_{\mu nj}}{-4\bar{Q}_{\mu nj} B_{\mu nj} e^{2\sqrt{-\bar{Q}_{\mu nj}}(Z - Z_{nj-1})}}, \quad \text{当 } \alpha_{\mu nj-1} \geq 0 \quad (3.14)$$

其中

$$B_{\mu nj} = \frac{1}{\beta_{\mu nj-1}} [1 + (|\alpha_{\mu nj-1}| + \sqrt{-\bar{Q}_{\mu nj}} \beta_{\mu nj-1})^2], \quad (3.15)$$

$$\beta = \frac{[B_{\mu nj} e^{-2\sqrt{-\bar{Q}_{\mu nj}}(Z - Z_{nj-1})} - W_{\mu nj}]^2 - 4\bar{Q}_{\mu nj}}{-4\bar{Q}_{\mu nj} B_{\mu nj} e^{-2\sqrt{-\bar{Q}_{\mu nj}}(Z - Z_{nj-1})}}, \quad \text{当 } \alpha_{\mu nj-1} < 0$$

及

$$(Z - Z_{n,j-1}) \leq \frac{1}{2\sqrt{-\bar{Q}_{\mu nj}}} \ln \left(\frac{B_{\mu nj}}{\sqrt{W_{\mu nj}^2 - 4\bar{Q}_{\mu nj}}} \right); \quad (3.16)$$

$$\beta = \frac{[D_{\mu nj} e^{2\sqrt{-\bar{Q}_{\mu nj}}(Z - Z_{n,j-1})} - W_{\mu nj}]^2 - 4\bar{Q}_{\mu nj}}{-4\bar{Q}_{\mu nj} D_{\mu nj} e^{2\sqrt{-\bar{Q}_{\mu nj}}(Z - Z_{n,j-1})}}, \text{ 当 } \alpha_{\mu n,j-1} < 0$$

及

$$(Z - Z_{n,j-1}) \geq \frac{1}{2\sqrt{-\bar{Q}_{\mu nj}}} \ln \left(\frac{B_{\mu nj}}{\sqrt{W_{\mu nj}^2 - 4\bar{Q}_{\mu nj}}} \right), \quad (3.17)$$

其中

$$D_{\mu nj} = \frac{W_{\mu nj}^2 - 4\bar{Q}_{\mu nj}}{B_{\mu nj}}. \quad (3.18)$$

3. 对漂移节 ($\bar{Q}_{\mu nj} = 0$) 有

$$\beta = \frac{1}{\gamma_{\mu n,j-1}} \{1 + [\alpha_{\mu n,j-1} + \gamma_{\mu n,j-1}(Z - Z_{n,j-1})]^2\}, \text{ 当 } \alpha_{\mu n,j-1} \geq 0 \quad (3.19)$$

$$\beta = \frac{1}{\gamma_{\mu n,j-1}} \{1 + [|\alpha_{\mu n,j-1}| - \gamma_{\mu n,j-1}(Z - Z_{n,j-1})]^2\}, \text{ 当 } \alpha_{\mu n,j-1} < 0 \quad (3.20)$$

利用关系式(2.3)和方程(3.5)就可得到

$$\alpha = \pm \sqrt{-\bar{Q}_{\mu nj}\beta^2 + W_{\mu nj}\beta - 1}. \quad (3.21)$$

当上面各式中的 $Z = Z_{n,j}$ 时, 就得到由 $\alpha_{\mu n,j-1}$, $\beta_{\mu n,j-1}$ 到 $\alpha_{\mu nj}$, $\beta_{\mu nj}$ 的递推关系式。

由于通常在一个节中粒子能量的增长是很小的, γ , 的变化不大, 将方程 (2.10) 右端的 γ , 近似为节中的初始值 $\gamma_{sn,j-1}$, 对方程积分得

$$\gamma_s^2 \beta_s^2 = \gamma_{sn,j-1}^2 \beta_{sn,j-1}^2 + \frac{2\gamma_{sn,j-1}}{m_0 c^2} \int_{Z_{n,j-1}}^Z f_{zs} dZ \quad (3.22)$$

利用 γ , 与 β , 的定义关系和 (3.22) 式就可解得 γ , 和 β , 值。将它们和上面求得的 β 函数值代入关系式(2.5), 即可计算出节中各点的束流包络。当 $Z = Z_{n,j}$ 时, 得到各节端点上的包络值为

$$\left. \begin{aligned} a_{x\mu nj} &= \frac{1}{\sqrt{\gamma_{snj}\beta_{snj}}} \sqrt{\sigma_x \beta_{x\mu nj}}, \\ a_{y\mu nj} &= \frac{1}{\sqrt{\gamma_{snj}\beta_{snj}}} \sqrt{\sigma_y \beta_{y\mu nj}}, \\ a_{z\mu nj} &= \frac{1}{\sqrt{\gamma_{snj}^3 \beta_{snj}}} \sqrt{\sigma_z \beta_{z\mu nj}}. \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

以上所述公式已构成完整的计算循环。当粒子所受的加速力, 聚焦力和空间电荷力的具体表示式为已知时, 就可以由这些公式计算出不同束流强度和不同初始条件下束流的横向和纵向包络和发射度形状参数 β , α , γ 。这里束流的纵向包络 a_z 就是束团在纵向的半长度。

四、包络极值的位置

包络函数的极值就相应于束流包络的极值, 上面已导出了包络函数极值大小的表示

式,这里给出极值位置的表示式.

假定 l_{nj} 取得很小,可以限制在一个节中最多只出现一次极值.在此条件下,对于聚焦节 ($\bar{Q}_{\mu nj} > 0$), β_{\max} 和 β_{\min} 出现的位置分别由下式确定

$$(Z - Z_{n,j-1})|_{\beta=\beta_{\max}} = \frac{1}{2\sqrt{\bar{Q}_{\mu nj}}} \left[\frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \left(\frac{2\bar{Q}_{\mu nj}\beta_{\mu n,j-1} - W_{\mu nj}}{\sqrt{W_{\mu nj}^2 - 4\bar{Q}_{\mu nj}}} \right) \right],$$

当 $\alpha_{\mu n,j-1} > 0$

(4.1)

$$(Z - Z_{n,j-1})|_{\beta=\beta_{\min}} = \frac{1}{2\sqrt{\bar{Q}_{\mu nj}}} \left[\frac{\pi}{2} + \sin^{-1} \left(\frac{2\bar{Q}_{\mu nj}\beta_{\mu n,j-1} - W_{\mu nj}}{\sqrt{W_{\mu nj}^2 - 4\bar{Q}_{\mu nj}}} \right) \right].$$

当 $\alpha_{\mu n,j-1} \leq 0$

(4.2)

对散焦节 ($\bar{Q}_{\mu nj} < 0$), β_{\min} 出现的位置为

$$(Z - Z_{n,j-1})|_{\beta=\beta_{\min}} = \frac{1}{2\sqrt{-\bar{Q}_{\mu nj}}} \ln \left(\frac{B_{\mu nj}}{\sqrt{W_{\mu nj}^2 - 4\bar{Q}_{\mu nj}}} \right).$$

当 $\alpha_{\mu n,j-1} < 0$

(4.3)

对漂移节 ($\bar{Q}_{\mu nj} = 0$), β_{\min} 出现的位置为

$$(Z - Z_{n,j-1})|_{\beta=\beta_{\min}} = \frac{|\alpha_{\mu n,j-1}|}{\gamma_{\mu n,j-1}}, \quad \text{当 } \alpha_{\mu n,j-1} < 0$$
(4.4)

注意,只有节的长度 l_{nj} 大于或等于上述长度时,极值才可能出现.

五、几点说明

1. 本文所给出的包络函数的近似解在 γ, β 为常数和不计入束流空间电荷效应时,自然地过渡为方程(2.6)的精确解^[9].

2. 本文的近似解除了适用于考虑加速过程和线性空间电荷力的情况外,也适用于计入元件沿 Z 方向的非均匀场和边沿杂散场的情况.

3. 原则上, ΔI 和 l_{nj} 取得越小,解的精确度越高,但另一方面, ΔI 和 l_{nj} 越小,计算量也就越大.因而,对于具体的系统, ΔI 和 l_{nj} 只要取得小到这样的程度,即进一步缩小它们时所得束流包络的修正量小于所允许的误差就行了.

参 考 文 献

- [1] M. Kapchinskij and V. V. Vladimirskij, Int. Conf. on High Energy Accelerators and Instrumentation, CERN, p. 274 (1959).
- [2] И. М. Капчинский, динамика частиц влинейных резонансных ускорителях, атомиздат москва, стр 194 (1966).
- [3] K. Batchelor, Proc. 1976 Proton Linear Accelerator Conference, AECL 5677, p. 160, Chalk River, ont. (1976).
- [4] G. Lambertson et al., IEEE, Trans, Nucl. Sci., 24.3(1977), 993.
- [5] F. J. Sacherer, CERN/SI/Int. DL/70-12, (1970).
- [6] C. R. Emigh, Proc. 1972 Proton Linear Accelerator Conf. LA5115, p. 182, Los Alamos (1972).
- [7] 谢毅等,科技, 2(1978), 119.
- [8] 魏开煜,带电束流传输理论,北京电机工程学会, (1980).
- [9] 魏开煜,高能物理与核物理, Vol. 5, No. 3, (1981), 328.

EQUATION OF BEAM ENVELOP FUNCTIONS AND THEIR APPROXIMATE SOLUTIONS

WEI KAI-YU

(Institute of High Energy Physics, Academia Sinica)

ABSTRACT

The normalized equations of beam envelop functions $\beta_u(u = x, y, z)$ are described. These equations can be used to describe the envelop and emittance shape of relativistic beam and non-relativistic beam in accelerative systems and transport systems.

In the paper, we also described an approximate method solving these equations in the case to take into account acceleration process and beam space charge effect, and have obtained the expressions of the approximate solutions in this case.