第5卷 第6期　　高能物理与核物理　　Vol. 5, No. 6
1981年11月　　PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS　　Nov., 1981

关于 $SU(3)$ 群拓扑荷为4的瞬子

郭硕鸿　陈启洲　关　洪
(中　山　大　学)

摘　　要

本文讨论了 $SU(3)$ 群中拓扑荷为 4 的瞬子组态，求出它们的零模和非零模因子以及它们对重层子对相互作用位势的贡献. 结果表明这种组态相对于四个远离的单瞬子组态的贡献是可以忽略的.

在 $SU(3)$ 规范理论中，存在拓扑荷为 4 的瞬子[1-3]. 这种瞬子相当于在同一位置上四个拓扑荷为 1 的瞬子的迭合. 本文讨论这种拓扑荷为 4 的瞬子组态对于四个互相远离的拓扑荷为 1 的瞬子组态对真空跃迁幅和对重层子相互作用位势的贡献.

拓扑荷为 4 的瞬子解为

$$A_\mu = \frac{1}{2} A_\mu^a \lambda_a,\quad A_\mu^a = \frac{4}{g} \zeta_{\mu\nu}^a \frac{\rho^2 x_\nu}{x^2(x^2+\rho^2)}. \tag{1}$$

其中 $\lambda_a(a=1,2,\cdots,8)$ 是 $SU(3)$ 的八个生成元，

$$\zeta_{\mu\nu}^7 = \eta_{\mu\nu}^1,\quad \zeta_{\mu\nu}^5 = -\eta_{\mu\nu}^2,\quad \zeta_{\mu\nu}^2 = \eta_{\mu\nu}^3;\quad \zeta_{\mu\nu}^a = 0,\quad a = 1,3,4,6,8. \tag{2}$$

$\eta_{\mu\nu}^a$ 是 't Hooft 符号[4].

λ_7, $-\lambda_5$ 和 λ_2 组成角动量算符的三维表示. 计算表明

$$[\lambda_2,[\lambda_2,\lambda_a]] + [\lambda_5,[\lambda_5,\lambda_a]] + [\lambda_7,[\lambda_7,\lambda_a]] = \begin{cases} 2\lambda_a, & 当\ a = 2,5,7 \\ 6\lambda_a, & 当\ a = 1,3,4,6,8 \end{cases} \tag{3}$$

因此，λ_2, λ_5 和 λ_7 组成同位旋 $t=1$ 的一组三重态，而余下的 λ_1, λ_3, λ_4, λ_6 和 λ_8 则组成一组 $t=2$ 的五重态. 这是同嵌入瞬子（以 $\lambda_1/2$, $\lambda_2/2$, $\lambda_3/2$ 作为同位旋算符）的情况不一样的(分数).

拓扑荷为 4 的瞬子组态对真空跃迁幅的贡献为[4,5]

$$W = \int \prod_i d\gamma_i J(\gamma) Q(\gamma) e^{-S^{cl}}, \tag{4}$$

其中 S^{cl} 是经典作用量，对拓扑荷为 4 的瞬子有

$$S^{cl} = \frac{32\pi^2}{g^2}, \tag{5}$$

γ_i 为集体坐标，$J(\gamma)$ 为零模因子，$Q(\gamma)$ 为非零模因子. 't Hooft[4] 已给出非零模贡献的一般公式，只要把其中的同位旋代以 (3) 式意义下的同位旋，就可以求出在拓扑荷为 4 的瞬子背景场中的量子涨落非零模因子. 由于现在矢量场含有一组 $t=1$ 和一组 $t=2$ 的多重态，由 't Hooft 的公式得非零模因子

本文 1980 年 8 月 31 日收到.

$$Q(\gamma)=\exp[-\ln(\mu_0\rho)-\alpha(1)-\alpha(2)], \tag{6}$$

其中 μ_0 为重整化参数，$\alpha(t)$ 的值在文献[4]中给出.

现在计算零模因子 $J(\gamma)$. 按照一般理论，$SU(3)$ 群的拓扑荷为 4 的组态共有 48 个零模[3]. 但是,瞬子场(1)式代表四个粘在一起的单瞬子,这种组态只含有 13 个参数. 以 z_μ 表示瞬子中心的位置，ρ 表示瞬子的标度，$R=\exp\left(\frac{i}{2}\theta_a\lambda_a\right)$ 表示总体规范转动，则拓扑荷为 4 的瞬子有一般形式

$$A_\mu=\frac{4}{g}\zeta^a_{\mu\nu}\frac{\rho^2(x-z)^2}{(x-z)^2[(x-z)^2+\rho^2]}R\frac{\lambda_a}{2}R^{-1}. \tag{7}$$

此式含 13 个参数 z_μ, ρ 和 θ_a. 对应于这 13 个参数,可以分别求出 13 个零模.

以 γ_i 表示经典解 A^{cl}_μ 所含的参数,则零模有一般形式

$$\phi^{(i)}_\mu=\frac{\partial A^{cl}_\mu}{\partial\gamma_i}+D_\mu\Lambda^{(i)}, \tag{8}$$

式中 D_μ 为经典场中的协变微分，$D_\mu\Lambda^{(i)}$ 项是使零模 $\phi^{(i)}_\mu$ 满足背景规范条件

$$D_\mu\phi^{(i)}_\mu=0 \tag{9}$$

所需的规范变换.

与参数 ρ 对应的涨缩零模为

$$\phi^{(\rho)}_\mu=\frac{\partial A^{cl}_\mu}{\partial\rho}, \tag{10}$$

其模为

$$\|\phi^{(\rho)}_\mu\|=\left(\int(\phi^{(\rho)}_\mu)^2d^4x\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{8\pi}{g}. \tag{11}$$

总平移零模为

$$\phi^{(\nu)}_\mu=\frac{\partial A^{cl}_\mu}{\partial z_\nu}+D_\mu A^{cl}_\nu=F^{cl}_{\mu\nu}, \tag{12}$$

其模为

$$\|\phi^{(\nu)}_\mu\|=\frac{4\sqrt{2}\,\pi}{g}. \tag{13}$$

总体规范零模为

$$\phi^{(a)}_\mu(x)=D_\mu\left(\Lambda^{(a)}+\frac{\lambda_a}{g}\right), \tag{14}$$

其中 $\Lambda^{(a)}$ 满足方程

$$\partial^2\Lambda^{(a)}-2ig[A^{cl}_\mu,\partial_\mu\Lambda^{(a)}]-g[A^{cl}_\mu,[A^{cl}_\mu,\lambda_a]]-g^2[A^{cl}_\mu,[A^{cl}_\mu,\Lambda^{(a)}]]=0. \tag{15}$$

取试解 $\Lambda^{(a)}=B(x^2)\lambda_a$, 用(3)式,得

$$\partial^2B-\frac{4\rho^4}{gx^2(x^2+\rho^2)^2}t(t+1)(1+gB)=0, \tag{16}$$

对 $a=2,5,7$, 有 $t=1$; 对 $a=1,3,4,6,8$, 有 $t=2$. 令 $\phi=1+gB$, 解(16)式得

$$\phi=\left(\frac{x^2}{x^2+\rho^2}\right)^t,$$

由此求出

$$\Lambda^{(a)} = -\frac{\rho^2}{g}\frac{1}{x^2+\rho^2}\lambda_a,\ a = 2, 5, 7;$$
$$\Lambda^{(a)} = \frac{1}{g}\left[\left(\frac{x^2}{x^2+\rho^2}\right)^2 - 1\right]\lambda_a,\ a = 1, 3, 4, 6, 8. \tag{17}$$

相应的零模有

$$\|\phi_\mu^{(a)}\| = \begin{cases} \dfrac{4\pi\rho}{g}, & a = 2, 5, 7; \\ \dfrac{4\sqrt{2}\pi\rho}{g}, & a = 1, 3, 4, 6, 8. \end{cases} \tag{18}$$

以上计算了四个瞬子粘在一起时的13个零模．为了求出全部零模，还需要计算四个瞬子各自独立变动时的零模．由于只有当四个瞬子粘在一起时有精确解(11)式，当四个瞬子各自变动时没有显示形式的精确解，因此不能用通常方法求出这些零模．下面我们给出一种处理方法．

设拓扑荷为4的经典解有四个互相正交的零模 ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 和 ϕ_4，相应于标度参数 ρ_1, ρ_2, ρ_3 和 ρ_4

$$\phi_i^\mu = \frac{\partial A_\mu^{cl}}{\partial \rho_i} + D_\mu \Lambda_i,\ i = 1, \cdots, 4$$
$$(\phi_i, \phi_j) = u^2\delta_{ij}. \tag{19}$$

对参数作变换

$$\begin{pmatrix}\rho_1\\ \rho_2\\ \rho_3\\ \rho_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\rho\\ \rho'\\ \rho''\\ \rho'''\end{pmatrix}. \tag{20}$$

相应的零模变换为

$$\begin{pmatrix}\phi\\ \phi'\\ \phi''\\ \phi'''\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\\ \phi_4\end{pmatrix}. \tag{21}$$

取 ρ 为四个瞬子的总标度参数，则 ρ', ρ'' 和 ρ''' 代表它们的相对标度参数，而 ρ_1, ρ_2, ρ_3 和 ρ_4 是四个瞬子各自的标度参数的某种线性组合（这种组合使四个零模互相正交）．由(19)、(21)和(11)式得

$$u = \frac{1}{2}\|\phi\| = \frac{4\pi}{g}. \tag{22}$$

因此，和标度参数有关的零模因子为

$$\left(\frac{4\pi}{g}\right)^4 d\rho_1 d\rho_2 d\rho_3 d\rho_4. \tag{23}$$

注意此式形式上和四个互相远离的单瞬子的涨落零模因子是一样的．

对平移零模也可以用同一方法处理，得到和平移有关的零模因子为

$$\left(\frac{2\sqrt{2}\,\pi}{g}\right)^{16} d^4z_1d^4z_2d^4z_3d^4z_4, \tag{24}$$

其中 $z_{i\mu}$ 可以看做四个瞬子各别的位置参数．注意此式也是和四个互相远离的单瞬子零模因子形式上一样．

求总体规范零模时，注意对 $a=3$ 和 8，都只能有两个独立的零模．因此，由(18)式，总体规范零模因子为

$$\left(\frac{2\pi\rho}{g}\right)^{12}\left(\frac{2\sqrt{2}\,\pi\rho}{g}\right)^{12}\left(\frac{4\pi\rho}{g}\right)^{4} d^4t_1d^4t_2d^4t_4d^4t_5d^4t_6d^4t_7d^2t_3d^2t_8. \tag{25}$$

四个互相远离的单瞬子的规范零模为

$$\left(\frac{4\pi\rho}{g}\right)^{12}\left(\frac{2\sqrt{2}\,\pi\rho}{g}\right)^{16}\prod_{i=1}^{7} d^4t_i. \tag{26}$$

比较(25)和(26)式，可见拓扑荷为 4 的瞬子的零模因子比四个远离的单瞬子的零模因子小 2^{10} 倍．两者非零模因子的比值为

$$e^{-\alpha(2)}/e^{-\alpha(\frac{1}{2})}<1.$$

因此，拓扑荷为 4 的组态相对于四个远离的单瞬子组态对真空跃迁幅的贡献是可以忽略的．

下面再计算拓扑荷为 4 的瞬子对重层子相互作用位势的贡献．距离为 R 的重层子对之间的位势为[6]

$$\begin{aligned} V(R)&=\int\frac{d\rho}{\rho^5}D(\rho)W(R,\rho),\\ W(R,\rho)&=-\frac{1}{3}\int d^3z\,\mathrm{Tr}\left(Pe^{i\oint gA_\mu dx}-1\right). \end{aligned} \tag{27}$$

式中 $D(\rho)$ 决定于零模因子，$\vec{z}$ 为瞬子位置参数，P 表示路径编序，回路积分沿边长为 $\vec{R}$ 和 T 的长方形进行（$T\to\infty$）．设

$$L_1=\lambda_7,\ L_2=-\lambda_5,\ L_3=\lambda_2, \tag{28}$$

则中心在 z_μ 处的拓扑荷为 4 的瞬子组态写成

$$A^a_\mu=\frac{2}{g}\bar{\eta}^a_{\mu\nu}L_a\frac{\rho^2(x-z)_\nu}{(x-z)^2[(x-z)^2+\rho^2]}, \tag{29}$$

L_a 是角动量算符三维表示，其矩阵元为

$$(L_k)_{ij}=-i\varepsilon_{ijk}. \tag{30}$$

用公式

$$\begin{aligned} (\vec{L}\cdot\hat{x})^{2n}_{ij}&=\delta_{ij}-\hat{x}_i\hat{x}_j,\ n\geqslant 1\\ (\vec{L}\cdot\hat{x})^{2n+1}_{ij}&=(\vec{L}\cdot\hat{x})_{ij}=-i\varepsilon_{ijk}\hat{x}_k,\ n\geqslant 1 \end{aligned} \tag{31}$$

其中 $\hat{x}=\vec{x}/|\vec{x}|$．对任意函数 $f(x)$ 有

$$e^{i\vec{L}\cdot\hat{x}f(x)}=\hat{x}_i\hat{x}_j+(\delta_{ij}-\hat{x}_i\hat{x}_j)\cos f(x)+\varepsilon_{ijk}\hat{x}_k\sin f(x). \tag{32}$$

由(29)和(27)式得

$$W(R,\rho)=-\frac{1}{3}\{2\cos f(z)\cos f(y)+2\hat{z}\cdot\hat{y}\sin f(z)\sin f(y)-2$$

$$-[1-(\hat{x}\cdot\hat{y})^2][1-\cos f(x)-\cos f(y)+\cos f(x)\cos f(y)]\} \tag{33}$$

其中

$$\vec{y}=\vec{x}-\vec{R}, \tag{34}$$

$$f(x)=\frac{2\pi|\vec{x}|}{\sqrt{\vec{x}^2+\rho^2}}, \tag{35}$$

$\vec{R}$ 为层子对距离.

由 $W(R,\rho)$ 可求得拓扑荷为 4 的组态所产生的重层子对间的位势 $V(R)$. 但由于这种组态所占的相空间远远比四个独立的单瞬子所占的相空间小，因此拓扑荷为 4 的瞬子对物理过程的贡献总是可以忽略的.

参 考 文 献

[1] F. Wilezek, *Phys. Lett.*, 65B(1976), 160.
[2] M. Marciano, H. Pegels and Z. Parsa, *Phys. Rev.*, D15(1977), 1044.
[3] C. W. Bernard, N. H. Christ, A. H. Guth and E. J. Weinberg, *Phys. Rev.*, D16(1977), 2967.
[4] G. 'tHooft, *Phys. Rev.*, D14(1976), 3432; D18(1978), 2199(E).
[5] C. Bernard, *Phys. Rev.*, D19(1979), 3013.
[6] C. G. Callan, R. Dashen and D. J. Gross, *Phys. Rev.*, D17(1978), 2717.

ON THE *SU*(3) INSTANTONS WITH TOPOLOGICAL CHARGE 4

Guo Shuo-hong Chen Qi-zhou Guan Hong

(*Zhongshan University*)

Abstract

The configurations of the $SU(3)$ instantons with topological charge 4 are discussed, and their zero mode and non-zero mode factors as well as their contributions to the interaction potential of heavy quark pairs are evaluated. It is shown that the contributions of these configurations can be neglected as compared with those of the configurations of four far-separated single instantons.