第5卷 第6期　高能物理与核物理　Vol. 5, No. 6
1981年11月　PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS　Nov., 1981

代的问题和 *SO*（14）大统一理论

马中骐　杜东生　周咸建　薛丕友
（中国科学院高能物理研究所）

摘　　要

本文提出了三个 $SO(14)$ 规范群大统一模型．它们能容纳四代通常的费米子．模型A预言了第一代和第二代费米子具有 $V-A$ 型荷电弱流，而第三代和第四代费米子具有 $V+A$ 型荷电弱流． 在模型B中，我们得到和实验接近的 Weinberg 值：$\sin^2\theta_w = 0.225$ 荷电中间玻色子和中性中间玻色子的质量都将比 Weinberg-Salam 模型中的大 1.7 倍．模型B预言了另一个质量为 100GeV 数量级的中性中间玻色子，它与第一、二代费米子的耦合类似于重光子的耦合．模型B的 $\tau-\nu_\tau$ 耦合和模型C的四代轻费米子的荷电弱流都是 $V-A$ 型．本文中所有的模型都能容纳质量关系：$m_e\cdot m_\mu \sim m_d\cdot m_s$，$m_\mu\sim 3m_s$，$m_\tau\sim m_b$，并给出第一 Cabibbo 角 $\sin\theta_1 = \sqrt{\frac{m_d}{m_s}}$．

一、引　　言

Glashow-Weinberg-Salam 的弱电统一模型[1]的成功和量子色动力学取得的进展，使人们深信，强相互作用、电磁相互作用和弱相互作用必将最终统一起来．人们已提出了种种的大统一模型[2]，其中最优美的是 $SU(5)$ 和 $SO(10)$ 模型． 但还存在两个基本问题没有解决：即各代的统一问题和规范阶层（Gauge hierarchy）问题．文[3]和[4]提出了一些把四代轻子和夸克统一起来的 $SU(7)$ 规范群大统一模型．该文指出，由于"存活假设"[3]（Survival hypothesis），为了使低质量费米子存在，有三种可能的途径，因而建立了三种 $SU(7)$ 大统一模型．类似地，本文提出了一类把四代轻子和夸克统一起来的 $SO(14)$ 大统一模型．类似文[3,4]的三种途径，而建立三种具体模型．

在模型A中，我们选择合适的 Higgs 破缺机制，在破缺的第一阶段，从 $SO(14)$ 破缺到 $G_1' = SU(3)\times SU_L(2)\times U(1)\times U'(1)$，而不像通常做的那样，破缺到 $G_1 = SU(3)\times SU_L(2)\times U(1)$． 左手费米子的表示对 G_1' 是复的，费米子不可能在此破缺阶段获得质量．在破缺的第二阶段，从 G_1' 破缺到 $SU(3)\times U(1)$，费米子才获得了低质量．这时，必然要出现两个数量级为 100GeV 质量的中性中间玻色子．我们选择适当的 Higgs 破缺机制，使得其中之一相应于通常 W-S 模型中的中性中间玻色子；而另一个仅与三、四代费米

本文 1980 年 8 月 13 日收到．

子耦合，因此目前实验还观察不到它的效应．在这个模型中各代对应的费米子的电荷是相同的．第一、二代费米子具有左手荷电弱流，但第三、四代费米子具有右手荷电弱流．目前 τ 轻子实验[6] 有利于左手流，这类实验测量是较困难的，建议作进一步实验验证．

在模型 B 中，三、四代费米子与一、二代费米子的电荷很不相同．目前实验上在预期的质量区域还没有发现 t 夸克，也许表明第三代开始，费米子的性质不完全重复了．第三代荷电反轻子是带负电的，我们称它为 τ 轻子，它参与 $V-A$ 型弱耦合．荷电的中间玻色子质量比 $SU(5)$ 理论中的大 1.7 倍．模型 B 中，类似模型 A 的另一中间玻色子，与一、二代费米子的耦合像重光子的耦合一样．模型 B 还预言了存在着带二个单位电荷的轻子和带 $\frac{4}{3}$e，$\frac{5}{3}$e 分数电荷的夸克．

在模型 C 中，我们引进两个 $SO(14)$ 64 维旋量表示，各填一种手征的费米子．Higgs 机制把 $SO(14)$ 先破缺到 G_1'，另外新引进一个反射对称性，它在第一阶段没有破缺．这样保证了存在八代低质量的费米子．适当选择 Yukawa 耦合和 Higgs 场的真空期望值，使四代费米子获得较重的 100GeV 量级的质量．余下四代较轻的通常费米子的荷电弱流都是左手的．我们还讨论了一种模型，在一个 $SO(14)$ 64 维表示中填以不同手征的费米子，这同样可以得到四代费米子都具有左手荷电弱流．

这些模型都保留了 $SO(10)$ 模型的一些好结果，例如在大统一点 Weinberg 角

$$\sin^2\theta_w = \frac{3}{8}.$$

并且这些模型可以容纳目前大统一理论认为较好的一些质量关系，$m_e \cdot m_\mu \sim m_d \cdot m_s$，$m_\mu \sim 3m_s$，$m_\tau \sim m_b$，第一 Cabibbo 角 $\sin\theta_1 \doteq \sqrt{\frac{m_d}{m_s}}$．

第二、三和四节分别叙述 A，B 和 C 三种模型．第五节概括一下所得的结果．附录 A，B 分别给出 $SO(2n)$ 和 $SO(14)$ 旋量表示．

二、模　型　A

我们选择大统一规范群为 $SO(14)$．它的一个不可约旋量表示为 64 维表示．此表示的生成元 I_{ab} 在附录 B 给出．由它们可以构成以下互相对易的物理量算符

$$\begin{aligned}
&T_3^c = \frac{1}{\sqrt{2}}(I_{56} + I_{78}), \quad T_8^c = \frac{1}{\sqrt{6}}(-I_{56} + I_{78} + 2I_{9\bar{0}}), \\
&T_{15}^c = \frac{1}{\sqrt{3}}(I_{56} - I_{78} + I_{9\bar{0}}), \\
&T_3^L = \frac{1}{\sqrt{2}}(I_{12} + I_{34}), \quad T_3^R = \frac{1}{\sqrt{2}}(I_{12} - I_{34}), \\
&T_3^{L'} = \frac{1}{\sqrt{2}}(I_{\bar{1}\bar{2}} + I_{\bar{3}\bar{4}}), \quad T_3^{R'} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-I_{\bar{1}\bar{2}} + I_{\bar{3}\bar{4}}).
\end{aligned} \tag{1}$$

这些物理量分别对应于 $SO(14)$ 子群 $SU(4) \times SU_L(2) \times SU_R(2) \times SU_L'(2) \times SU_R'(2)$

中相应的物理量．令电荷算子

$$Q=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{\frac{3}{8}}T_3^L+\sqrt{\frac{3}{8}}T_3^R+\frac{1}{2}T_{15}^C\right). \tag{2}$$

在此模型中，费米子按以下方式填充到 64 维表示中：

$$\tilde{\psi}_+=(\mathrm{I}_a,\mathrm{II}_a,\mathrm{III}_a,\mathrm{IV}_a;\mathrm{I}_b,\mathrm{II}_b,\mathrm{III}_b,\mathrm{IV}_b)_L$$

其中

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_a&=(u_1,u_2,u_3,\nu_e;d_1,d_2,d_3,e),\\
\mathrm{II}_a&=(c_1,c_2,c_3,\nu_\mu;s_1,s_2,s_3,\mu),\\
\mathrm{III}_a&=(b_1^c,b_2^c,b_3^c,\tau^c;-t_1^c,-t_2^c,-t_3^c,-\nu_\tau^c),\\
\mathrm{IV}_a&=(b_1'^c,b_2'^c,b_3'^c,\tau'^c;-t_1'^c,-t_2'^c,-t_3'^c,-\nu_{\tau'}^c),\\
\mathrm{I}_b&=(u_1^c,u_2^c,u_3^c,P_e^c;d_1^c,d_2^c,d_3^c,e^c),\\
\mathrm{II}_b&=(c_1^c,c_2^c,c_3^c,P_\mu^c;s_1^c,s_2^c,s_3^c,\mu^c),\\
\mathrm{III}_b&=(b_1,b_2,b_3,\tau;-t_1,-t_2,-t_3,-\nu_\tau),\\
\mathrm{IV}_b&=(b_1',b_2',b_3',\tau';-t_1',-t_2',-t_3',-\nu_{\tau'}),
\end{aligned} \tag{3}$$

其中 $u_i, c_i, t_i, t_i'; d_i, s_i, b_i, b_i'; e, \mu, \tau, \tau'; \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau, \nu_{\tau'}$ 分别表示从第一代到第四代的上夸克场，下夸克场，荷电轻子场和中微子场．$P_{eL}^c, P_{\mu L}^c$ 为新引进的中性轻子场．下标 i 为色指标，上标 c 表示取电荷共轭态．这样的 Q 算子的选择，使得四代费米子对应的粒子具有相同的电荷．此外，我们还要引进 $SO(14)$ 群两个单态粒子 P_{eL} 和 $P_{\mu L}$．由于 $SO(n)$ 是安全代数，在本文的所有模型中，不会有 Adler 反常．

令 ϕ^{ij}, χ_1 和 χ_2 分别为 $SO(14)$ 的 91 维反对称表示 Higgs 场和两个 64 维旋量表示 Higgs 场．取如下的不为零的真空期望值

$$\begin{aligned}
&\langle\phi^{12}\rangle=d,\quad \langle\phi^{34}\rangle=-d,\quad \langle\phi^{56}\rangle=-\langle\phi^{78}\rangle=\langle\phi^{9\overline{0}}\rangle=a,\\
&\langle\phi^{1\overline{3}}\rangle=b,\quad \langle\phi^{3\overline{4}}\rangle=c,\quad \langle(\chi_1)_{36}\rangle=f,\quad \langle(\chi_2)_{44}\rangle=f'.
\end{aligned} \tag{4}$$

这些真空期望值的数量级为 10^{15}GeV．这样当 $SO(14)$ 破缺到 $G_1'=SU(3)\times SU_L(2)\times U(1)\times U'(1)$ 后，除了此子群 G_1' 相应的规范场粒子质量为零外，其余规范场都获得 10^{15}GeV 量级的质量．这里，$U'(1)$ 的生成元为 $T_3^{R'}$，对第一、二代费米子此量子数为零，对第三、四代费米子，此量子数为 $+1$ 或 -1．由费米子的填充知，这样就不可能构成 G_1' 的不变质量项，因此在此破缺阶段，除 P_e, P_μ 外，所有费米子质量依然为零．

引进 Yukawa 耦合

$$C_1\bar{P}_{eR}^c\chi_1^+\phi_+,\quad C_2\bar{P}_{\mu R}^c\chi_2^+\phi_+. \tag{5}$$

在第一阶段破缺后，中性轻子 P_e 和 P_μ 将获得 10^{15}GeV 量级的质量．这样，在第二阶段破缺后，P_e, P_μ 即使与其它中微子场有 10^2GeV 量级的混合，也可忽略不计．

在附录中证明了，只有三阶和七阶反对称张量 Higgs 场的真空期望值才能对费米子质量有贡献．为方便，记 ϕ^a 为 a 阶反对称张量．这样引进 Higgs 场 ϕ^3, ϕ^7 及其 Yukawa 耦合

$$\mathscr{L}_{\mathrm{Yuk}}=A_1(\tilde{\psi}_+C^{-1})B^{-1}\hat{\phi}^3\psi_++A_2(\tilde{\psi}_+C^{-1})B^{-1}\hat{\phi}^7\psi_++\mathrm{h.c.} \tag{6}$$

其中 $\hat{\phi}^a=\frac{1}{a!}\phi_{i_1\cdots i_a}\gamma_{i_1}\cdots\gamma_{i_a}$，$C$ 是 Dirac 电荷共轭矩阵，而矩阵 B 和 γ_i 在附录中给出．

选择合适的 ϕ^3, ϕ^7 的真空期望值，模型A可以容纳目前大统一理论中所得到的较好

结果[8]

$$m_e\cdot m_\mu\sim m_d\cdot m_s,\quad m_\mu\sim 3m_s,\quad m_b\sim m_\tau,\quad \sin\theta_1\sim\sqrt{\frac{m_d}{m_s}}. \tag{7}$$

中微子场有 4 个左手态和两个右手态：ν_{eL}, $\nu_{\mu L}$, $\nu_{\tau L}$, $\nu_{\tau' L}$, $\nu_{\tau R}$, $\nu_{\tau' R}$. 这样必须有两个左手中微子态质量严格为零. 可以选择合适的 ϕ^3, ϕ^7 的真空期望值，使得质量严格为零的左手中微子态对应于 ν_{eL} 和 $\nu_{\mu L}$，并使 ν_τ 和 $\nu_{\tau'}$ 的质量在树图近似下等于零.

费米子场与规范场 A^μ_{ij} 的耦合为

$$g\bar\psi_+\gamma_\mu\hat{A}^\mu\psi_+,$$

这里 $\hat{A}^\mu=\frac{1}{2}I_{ab}A^\mu_{ab}$. 由电荷 Q 知，光子场为

$$A_\mu=\sqrt{\frac{3}{8}}A^L_{3\mu}+\sqrt{\frac{3}{8}}A^R_{3\mu}+\frac{1}{2}A^C_{15\mu}. \tag{8}$$

其中 $A^L_{3\mu}$, $A^R_{3\mu}$, $A^C_{15\mu}$ 等为与生成元 T^L_3, T^R_3, T^C_{15} 等对应的规范场. 在 $SO(14)$ 破缺到 G'_1 后，除了 A_μ 外，还有两个质量为零的中性规范场

$$Z_\mu=-\sqrt{\frac{5}{8}}A^L_{3\mu}+\frac{3}{2\sqrt{10}}A^R_{3\mu}+\frac{\sqrt{15}}{10}A^C_{15\mu} \tag{9}$$

和
$$Z'_\mu=A^{R'}_{3\mu}.$$

在第二阶段破缺后，可以使它们获得对角化质量. 对应于 Z_μ 和 Z'_μ 的中性荷为

$$Q_Z=-\sqrt{\frac{3}{8}}T^L_3+\frac{3}{2\sqrt{10}}T^R_3+\frac{\sqrt{15}}{10}T^C_{15} \tag{10}$$

和
$$Q_{Z'}=T^{R'}_3;$$

电磁流耦合为

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{3}}{2}gA^\mu\times\Big(&\frac{2}{3}\bar u_i\gamma_\mu u_i-\frac{1}{3}\bar d_i\gamma_\mu d_i-\bar e\gamma_\mu e+\frac{2}{3}\bar c_i\gamma_\mu c_i-\frac{1}{3}\bar s_i\gamma_\mu s_i-\bar\mu\gamma_\mu\mu\\&+\frac{2}{3}\bar t_i\gamma_\mu t_i-\frac{1}{3}\bar b_i\gamma_\mu b_i-\bar\tau\gamma_\mu\tau+\frac{2}{3}\bar t'_i\gamma_\mu t'_i-\frac{1}{3}\bar b'_i\gamma_\mu b'_i-\bar\tau'\gamma_\mu\tau'\Big);\end{aligned} \tag{11}$$

中性荷 Q_Z 的耦合为

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{5}}gZ^\mu\times\Big\{&\bar u_i\gamma_\mu\gamma_5u_i-\bar\nu_e\gamma_\mu(1-\gamma_5)\nu_e+\bar d_i\gamma_\mu\left(\frac{1}{2}-\gamma_5\right)d_i-\bar e\gamma_\mu\left(\frac{1}{2}+\gamma_5\right)e\\&+\bar c_i\gamma_\mu\gamma_5c_i-\bar\nu_\mu\gamma_\mu(1-\gamma_5)\nu_\mu+\bar s_i\gamma_\mu\left(\frac{1}{2}-\gamma_5\right)s_i-\bar\mu\gamma_\mu\left(\frac{1}{2}+\gamma_5\right)\mu\\&-\bar t_i\gamma_\mu\gamma_5t_i-\bar\nu_\tau\gamma_\mu(1+\gamma_5)\nu_\tau+\bar b_i\gamma_\mu\left(\frac{1}{2}+\gamma_5\right)b_i-\bar\tau\gamma_\mu\left(\frac{1}{2}-\gamma_5\right)\tau\\&-\bar t'_i\gamma_\mu\gamma_5t'_i-\bar\nu_{\tau'}\gamma_\mu(1+\gamma_5)\nu_{\tau'}+\bar b'_i\gamma_\mu\left(\frac{1}{2}+\gamma_5\right)b'_i-\bar\tau'\gamma_\mu\left(\frac{1}{2}-\gamma_5\right)\tau'\Big\}.\end{aligned} \tag{12}$$

与 Weinberg-Salam 模型中的中性流相比较知，在大统一点处 Weinberg 角

$$\sin^2\theta_W=\frac{3}{8}.$$

与 Z'_μ 相应的中性流耦合为

$$g\frac{Z'_\mu}{\sqrt{2}}\times(\bar{b}_i\gamma_\mu b_i+\bar{\tau}\gamma_\mu\tau+\bar{t}_i\gamma_\mu t_i+\bar{\nu}_\tau\gamma_\mu\nu_\tau-\bar{b}'_i\gamma_\mu b'_i$$
$$-\bar{\tau}'\gamma_\mu\tau'-\bar{t}'_i\gamma_\mu t'_i-\bar{\nu}_{\tau'}\gamma_\mu\nu_{\tau'})+\text{h. c.} \tag{13}$$

由于此中性流仅与三、四代费米子耦合，目前实验尚难测得它的效应.

荷电弱流是

$$gW^{+\mu}\times(\bar{u}_{iL}\gamma_\mu d_{iL}+\bar{\nu}_{eL}\gamma_\mu e_L+\bar{c}_{iL}\gamma_\mu s_{iL}+\bar{\nu}_{\mu L}\gamma_\mu\mu_L$$
$$+\bar{t}_{iR}\gamma_\mu b_{iR}+\bar{\nu}_{\tau R}\gamma_\mu\tau_R+\bar{t}'_{iR}\gamma_\mu b'_{iR}+\bar{\nu}_{\tau' R}\gamma_\mu\tau'_R)+\text{h. c.} \tag{14}$$

易见 Z_μ 引起的中性流，荷电弱流和电磁流之间的强度比与 W-S 模型是一样的. 可以看到，三、四代费米子的荷电弱流是右手的.

进一步的分析表明，如果费米子质量矩阵中各代的混合矩阵元较小时，就能保证

$$\frac{m_W^2}{m_Z^2}\doteq CR^2\theta_W.$$

而且我们可以取四阶 Higgs 能量场的适当真空期望值，使得 Z'_μ 为质量本征态.

三、模 型 B

在这个模型中，三、四代费米子与一、二代费米子电荷有较大不同. 费米子 $SO(14)$ 64 维旋量表示的填写如下

$$\tilde{\psi}_+=(\text{I}_a,\text{II}_a,\text{III}_a,\text{IV}_a;\text{I}_b,\text{II}_b,\text{III}_b,\text{IV}_b)_L.$$

其中 I_a, II_a, I_b 和 II_b 与模型A完全一样，其余如下

$$\begin{aligned}\text{III}_a&=(h_1^c,h_2^c,h_3^c,\lambda^c;-b_1^c,-b_2^c,-b_3^c,-\kappa^c),\\\text{IV}_a&=(t_1^c,t_2^c,t_3^c,\nu_\zeta^c;-r_1^c,-r_2^c,-r_3^c,-\zeta^c),\\\text{III}_b&=(h_1,h_2,h_3,\lambda;-b_1,-b_2,-b_3,-\kappa),\\\text{IV}_b&=(t_1,t_2,t_3,\nu_\zeta;-r_1,-r_2,-r_3,-\zeta).\end{aligned} \tag{15}$$

模型B中电荷算子改为

$$Q=\frac{1}{\sqrt{2}}(T_3^L+T_3^R)+\frac{1}{\sqrt{3}}T_{15}^C-\sqrt{2}\,T_3^{R'}. \tag{16}$$

这样，一、二代费米子电荷不变；b 夸克和 t 夸克的电荷依然为 $(-1/3)$ 和 $2/3$. 但荷电轻子 ζ, λ 和 κ 的电荷分别为 $+1$, -2 和 -1；h 夸克和 r 夸克电荷为 $-\frac{4}{3}$ 和 $\frac{5}{3}$. ν_ζ 为中性轻子. ζ_L 和 $\nu_{\zeta L}$ 是 $SU_L(2)$ 的单态，而 ζ_L^c 和 $\nu_{\zeta L}^c$ 构成 $SU_L(2)$ 的一个二重态.

第一阶段的破缺与模型A完全一样. 第二阶段破缺时，与模型A一样，引进三阶和七阶张量 Higgs 场和它们的 Yukawa 耦合(6). 但由于电荷算子的改变，真空期望值的选取不同了，这导致在费米子质量矩阵中，h, r 夸克，λ, ζ 轻子不与其它费米子混合，与模型A一样，模型B也能容纳(7)式的一些关系式.

同样，这模型也要引进 $SO(14)$ 单态费米子 P_{eL} 和 $P_{\mu L}$，以及它们的 Yukawa 耦合(5). 因此中性轻子 P_e 和 P_μ 的质量以及中微子的质量与模型A完全一样.

为了讨论中性荷和相应规范场的组合形式，需找出嵌入的

$$SU(3)\times SU(2)\times U(1)\times U'(1)$$

群的生成元

$$\begin{aligned}
&SU(3):\ \frac{1}{\sqrt{2}}T_1^C-\frac{1}{\sqrt{2}}T_8^C;\\
&SU(2):\ \frac{1}{\sqrt{2}}T_1^L-\frac{1}{\sqrt{2}}T_3^L,\quad T_3=\frac{1}{\sqrt{2}}T_3^L;\\
&U(1):\ I_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}T_3^R+\sqrt{\frac{2}{5}}T_{15}^C\right),\quad \frac{Y}{2}=\sqrt{\frac{5}{3}}I_1;\\
&U'(1):\ I_1'=\frac{1}{\sqrt{2}}T_3^{R'}.
\end{aligned}\tag{17}$$

它们的耦合常数分别是 g_3, g_2, g_1 和 g_1'，忽略阈行为在大统一点，令

$$g_3=g_2=g_1=g_1'=\sqrt{2}\,g.\tag{18}$$

按照标准方法[11]，重写电荷算符为

$$Q=\sqrt{\frac{10}{3}}\left\{\sqrt{\frac{3}{10}}\frac{1}{g_2}(g_2T_3)+\frac{1}{\sqrt{2}\,g_1}(g_1I_1)-\sqrt{\frac{6}{5}}\frac{1}{g_1'}(g_1'I_1')\right\},\tag{19}$$

故得

$$\frac{1}{e^2}=\frac{1}{g_2^2}+\frac{5}{3g_1^2}+\frac{4}{g_1'^2}\tag{20}$$

$$A_\mu=\sqrt{\frac{3}{10}}\frac{1}{g_2}B_\mu^3+\frac{1}{\sqrt{2}\,g_1}C_{1\mu}-\sqrt{\frac{6}{5}}\frac{1}{g_1'}C_{2\mu}.\tag{21}$$

B_μ^3, $C_{1\mu}$ 和 $C_{2\mu}$ 分别为 $SU(2)$, $U(1)$ 和 $U(1)'$ 群的规范场．在大统一点，$B_\mu^3=A_{3\mu}^L$, $C_{1\mu}=\sqrt{\frac{3}{5}}A_{3\mu}^R+\sqrt{\frac{2}{5}}A_{15\mu}^C$, $C_{2\mu}=A_{3\mu}^{R'}$.

根据正交性要求，写出中性荷算符

$$\begin{aligned}
Q_1^Z&=-\frac{\sqrt{5}\,g_2}{\sqrt{3g_1^2+5g_2^2}}(g_2T_3)+\frac{\sqrt{3}\,g_1}{\sqrt{3g_1^2+5g_2^2}}(g_1T_1)\\
&=-\frac{\sqrt{5}\,g_7}{\sqrt{3g_1^2+5g_2^2}}T_3+\frac{3g_1^2/\sqrt{5}}{\sqrt{3g_1^2+5g_2^2}}\left(\frac{Y}{2}\right),
\end{aligned}\tag{22}$$

与 Weinberg-Salam 模型比较（注意：因为 $Q\neq T_3+Y/2$，我们只能用公式

$$Q^Z\sim\cos^2\theta_wT_3-\sin^2\theta_w(Y/2),$$

不能用 $Q^Z\sim T_3-\sin^2\theta_wQ$）

$$\mathrm{tg}^2\theta_w=\frac{3}{5}\frac{g_1^2}{g_2^2},\tag{23}$$

在大统一点为 3/5.

$$Q_2^Z=e'\left[\sqrt{\frac{3}{10}}\frac{1}{g_2}(g_2T_3)+\frac{1}{\sqrt{2}\,g_1}(g_1I_1)+\sqrt{\frac{5}{6}}g_1'\left(\frac{3}{10g_2^2}+\frac{1}{2g_1^2}\right)(g_1'I_1')\right]$$

$$= \sqrt{\frac{3}{10}}\, e' \left[T_3 + \frac{Y}{2} + \frac{g_1'^2}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{g_2^2} + \frac{5}{3g_1^2} \right) T_3^{R'} \right], \tag{24}$$

$$\frac{1}{e'^2} = \frac{3}{10g_2^2} + \frac{1}{2g_1^2} + \frac{5g_1'^2}{6} \left(\frac{3}{10g_2^2} + \frac{1}{2g_1^2} \right)^2, \tag{25}$$

与 Q_1^Z 相对应的中性流是纯矢量流，而且第一、二代费米子的耦合形式和电磁流完全相同，因此 $Z_{2\mu}$ 类似重光子，它的质量依赖于一个独立的任意参数，量级为 100GeV. 在不久的将来，实验可以验证是否存在这种耦合.

为了计算普通能量下的 Weinberg 角，应用文献[12]的方法，根据重正化群方程[13]得

$$\left. \begin{aligned} & g_i^{-2}(\mu) \doteq g_G^{-2}(M) + 2b_i \ln \frac{M}{\mu} \\ & b_3 = -11(4\pi)^{-2} + b_1, \quad b_2 = -\frac{22}{3}(4\pi)^{-2} + b_1, \quad b_1' = b_1 \end{aligned} \right\} \tag{26}$$

因此，在此近似下，$g_1' = g_1$，并可解得

$$\tan^2\theta_w = \frac{3g_{30}^2 + 34e^2}{15g_{30}^2 - 10e^2}. \tag{27}$$

当 μ 取"普通质量" $\mu \sim 10\text{GeV}$, $\frac{g_{30}^2}{4\pi} = 0.2$，得到和实验接近的 Weinberg 角值

$$\sin^2\theta_w = 0.225 \tag{28}$$

最后，我们讨论带电弱流. 在模型B中，一、二代粒子是左手流，三、四代粒子是右手流，但把 τ^- 和 ν_τ 看做第三代的反轻子 ζ^C 和 ν_ζ^c，则 $\tau^- - \nu_\tau$ 耦合仍是 $V-A$ 型的. 带电规范玻色子质量为

$$m_w^2 = \frac{g_2^2}{4\sqrt{2}\, G_F} = \frac{e^2}{4\sqrt{2}\, G_F \sin^2\theta_w} \times \frac{1}{5}(17 - 12\sin^2\theta_w), \tag{29}$$

比 Weinberg-Salam 模型预言的大一个因子 $\frac{1}{5}(17 - 12\sin^2\theta_w) \sim 2.86$. 这希望在今后实验中得到检验.

四、模 型 C

在这一节提出的模型中，四代通常的费米子都具有左手荷电弱流. 引进费米子的两个 $SO(14)$ 64 维旋量表示 $\tilde{\psi}_{1+} = (\mathrm{I}_a, \mathrm{II}_a, \mathrm{III}_{ah}, \mathrm{IV}_{ah}; \mathrm{I}_b, \mathrm{II}_b, \mathrm{III}_{bh}, \mathrm{IV}_{bh})_L$,

$$\tilde{\psi}_{2+} = (\mathrm{I}_{ah}, \mathrm{II}_{ah}, \mathrm{III}_a, \mathrm{IV}_a; \mathrm{I}_{bh}, \mathrm{II}_{bh}, \mathrm{III}_b, \mathrm{IV}_b)_R.$$

其中 $\mathrm{I}_a, \mathrm{II}_a, \mathrm{III}_a, \mathrm{IV}_a, \mathrm{I}_b, \mathrm{II}_b, \mathrm{III}_b$ 和 IV_b 的填充和模型A一样，而带有下标 h 的另一组的场量只是把上一组的场量带上下标 h 但是把 P_{eh}^c 和 $P_{\mu h}^c$ 分别换成 ν_e^c 和 ν_μ^c. 这一组费米子称为重费米子，这是因为它们比不带下标 h 的通常费米子重. 此外，引进费米子 $SO(14)$ 单态 P_{eL}, $P_{\mu L}$.

我们假定在对称自发破缺前，拉氏密度还另有一个广义反射对称性 P. 在 P 作用下

$$\psi_{1+} \to \psi_{1+}, \quad \psi_{2+} \to -\psi_{2+}, \quad P_{eL} \to P_{eL}, P_{\mu L} \to P_{\mu L}.$$

和模型A一样，引进 Higgs 场 ϕ^{ij}, χ_1 和 χ_2，以及它们的不为零的真空期望值(4). 在

P 作用下这些 Higgs 场都不变. 这样,在第一阶段破缺后, $SO(14)$ 破缺到

$$G_1' = SU(3) \times SU_L(2) \times U(1) \times U'(1),$$

反射对称性 P 也没有破缺.

引进 Yukawa 耦合

$$C_1 \bar{P}^c_{eR} \chi_1^+ \phi_{1+}, \quad C_2 \bar{P}^c_{\mu R} \chi_2^+ \phi_{1+},$$

这样,在第一阶段破缺后, P_e 和 P_μ 得到量级为 10^{15}GeV 的质量. 而由其它的费米子不能构成 G_1' 和 P 的不变质量项. 在第二破缺阶段,引进三组反对称张量 Higgs 场: ϕ_1^3, ϕ_1^7; ϕ_2^3, ϕ_2^7; ϕ^2, ϕ^4, ϕ^6, 以及它们的 Yukawa 耦合

$$(\tilde{\phi}_{1+} C^{-1}) B^{-1} \hat{\phi}_1^3 \phi_{1+}, \quad (\tilde{\phi}_{1+} C^{-1}) B^{-1} \hat{\phi}_1^7 \phi_{1+};$$

$$(\tilde{\phi}_{2+} C^{-1}) B^{-1} \hat{\phi}_2^3 \phi_{2+}, \quad (\tilde{\phi}_{2+} C^{-1}) B^{-1} \hat{\phi}_2^7 \phi_{2+};$$

$$\bar{\phi}_{1+} \hat{\phi}^2 \phi_{2+}, \quad \bar{\phi}_{1+} \hat{\phi}^4 \phi_{2+}, \quad \bar{\phi}_{1+} \hat{\phi}^6 \phi_{2+}.$$

现在我们能选择前二组 Higgs 场的真空期望值，使得下面的条件满足：(i). 重费米子获得 100GeV 量级的较大的质量. 对于通常的四代轻费米子，本模型能容纳关系式 (7). (ii). 对每一个 64 维表示中的费米子,在树图近似下,不存在着第一、二代和第三、四代之间的混合.

选择第三组 Higgs 场的适当的小的真空期望值，可以给出轻费米子的前两代和后两代之间的一个小混合. 例如,我们可以得到比第一个 Cabibbo 角 $\sin\theta_1$ 小一个量级的第二、第三 Cabibbo 角 $\sin\theta_2$ 和 $\sin\theta_3$. ϕ^2, ϕ^4 和 ϕ^6 的真空期望值比 ϕ^3 和 ϕ^7 的小得多. 这样分立对称 P 弱破缺了. 在第二阶段破缺后, G_1' 破缺到 $SU(3) \times U(1)$.

在模型 C 中有 8 个左手中微子态和 6 个右手中微子态，因此必定有两个左手态具有严格为零的质量. 根据条件 (ii), 我们合适选择 Higgs 场的真空期望值，可以使这两个态对应于 ν_{eL} 和 $\nu_{\mu L}$. 我们也能使得 ν_τ 和 $\nu_{\tau'}$ 的质量在树图近似下为零. 关于荷电弱流和中性流的讨论类似于模型 A. 同样存在着两个量级为 100GeV 质量的中性中间玻色子 Z_μ, Z'_μ, 而 Z'_μ 仅与三、四代费米子耦合. 有意思的是，对于四代轻费米子，荷电弱流是 $V-A$ 型,而对于四代重费米子是 $V+A$ 型.

下面给出另一种可能的模型. 费米子只填在一个 $SO(14)$ 64 维旋量表示中,但是在此表示中既填有左手费米子态,又填有右手费米子态

$$\tilde{\phi}_+ = (\mathrm{I}_{aL}, \mathrm{II}_{aL}, \mathrm{III}_{aR}, \mathrm{IV}_{aR}; \mathrm{I}_{bL}, \mathrm{II}_{bL}, \mathrm{III}_{bR}, \mathrm{IV}_{bR}),$$

这里 I_a, II_a, III_a, IV_a, I_b, II_b, III_b, IV_b 的填写，除了在 III_{bR} 中以 $P_{\tau R}$ 代替 $\nu_{\tau R}$, 在 IV_{bR} 中以 $P_{\tau' R}$ 代替 $\nu_{\tau' R}$ 外,完全和模型 A 一样. 此外,引进 $SO(14)$ 单态费米子 P_{eL}, $P_{\mu L}$, $P_{\tau L}$ 和 $P_{\tau' L}$. Higgs 场 ϕ^{ij} 和 χ_1, χ_2 具有与模型 A 一样的真空期望值. 在此模型中，还要引进另两个 $SO(14)$ 64 维旋量表示 Higgs 场 χ_3 和 χ_4. 它们分别只有第 56 分量和第 64 分量的不为零的真空期望值,量级也为 10^{15}GeV. 这样再引进 Yukawa 耦合:

$$C_3 \bar{P}_{\tau L} \chi_3^+ \phi_+, \quad C_4 \bar{P}_{\tau' L} \chi_4^+ \phi_+.$$

在对称自发破缺的第一阶段, $SO(14)$ 破缺到 $SU(3) \times SU_L(2) \times U(1)$; P_e, P_μ, P_τ 和 $P_{\tau'}$ 获得 10^{15}GeV 量级的质量; ν_{eL}, $\nu_{\mu L}$, $\nu_{\tau L}$ 和 $\nu_{\tau' L}$ 的质量严格为零. 因为这种特殊的费米子填充，在第一阶段破缺后，我们不能由除了 P_e, P_μ, P_τ 和 $P_{\tau'}$ 外的费米子构成 $SU(3) \times SU_L(2) \times U(1)$ 不变的质量项.

类似地，此模型中四代费米子的荷电弱流都是 $V-A$ 型．只有一个中性中间玻色子 Z_μ 具有 100GeV 量级的质量；而另一个中性中间玻色子的质量升到 10^{15}GeV 数量级．

这个模型的问题之一是费米子和规范场之间的某些耦合不存在．虽然，此模型有着这样或那样的问题，但似乎是此模型不与目前的实验事实有直接的冲突．

五、结　论

我们已详细讨论了三个 $SO(14)$ 大统一模型．现把主要结论概括如下：(i) 利用某些与通常不一样的机制，$SO(14)$ 可选作为统一不少于四代的可行的规范群：在含有四代的模型 A 和 B 中，在第一破缺阶段，$SO(14)$ 破缺到 G_1' 而不是通常的

$$G_1 = SU(3)\times SU_L(2)\times U(1);$$

在模型 C 中，为了使得费米子在破缺的第一阶段不获得质量，还要引进一个新的反射对称性．但此模型引进八代费米子，目前实验还不能观察到其中较重的四代费米子；此外，我们还提出了一个更经济的模型，此模型中，把不同手征的费米子填入同一个不可约表示中．(ii) 本文的所有模型可以容纳好的费米子质量关系：$m_e m_\mu \sim m_d m_s$，$m_\mu \sim 3m_s$，$m_\tau \sim m_b$，并给出第一 Cabibbo 角 $\sin\theta_1 \sim \sqrt{\frac{m_d}{m_s}}$．(iii) 本文的模型都保留了 $SO(10)$ 大统一理论的好结果，例如在大统一点 $\sin^2\theta_W = \frac{3}{8}$．$B-L$ 是守恒的．(iv) 在模型 A，B 和 C 中，有两个质量为 100GeV 量级的中性中间玻色子．其中之一对应 W-S 模型中的 Z^0．在模型 A 和 C 中，另一个仅与第三和第四代费米子耦合，在目前的实验中，它的效应很难观察到．但在模型 B 中，此中性中间玻色子与第一、二代的耦合像重光子一样．它的效应也许在最近的将来[10] 可以验证．(v) 在模型 A 中第一、二代的费米子具有左手荷电弱流；但第三、四代费米子具有右手荷电弱流．模型 B 的情况与模型 A 一样，但因为电荷的特殊填充，重轻子 τ 看作为反轻子 ζ^c，它荷负电，并有荷电左手弱流．在模型 C，所有四代轻费米子具有左手荷电弱流．(vi) 对于模型 B，在普通能量 (10GeV) 下，我们算得 $\sin^2\theta_W \sim 0.225$；带电规范场W的质量是 Weinberg-Salam 模型中的 1.7 倍．前者与实验符合很好，后者将接受实验检验．

感谢朱洪元教授、胡宁教授、周光召教授、岳宗五教授和宋行长同志的有益讨论．还感谢蔡永赐教授，他告之了我们被 DELCO 组[6] 给出的 $\nu_\tau - \tau$ 流是 V − A 型的最好证据．

附录 A　$SO(2n)$ 的旋量表示

在附录 A 和 B 中将推导得本文用到的 $SO(14)$ 群的一些关系式．首先将简单地讨论一下 $SO(2n)$ 群旋量表示的一般性质．

I. Γ 矩阵群　引进 N 个 γ_j 矩阵，它们满足反对易关系

$$\{\gamma_i,\gamma_j\} = \gamma_i\gamma_j + \gamma_j\gamma_i = 2\delta_{ij}1. \tag{A1}$$

γ_j 矩阵的所有可能的乘积：

$$\gamma_i\gamma_j\cdots \epsilon\Gamma, \tag{A2}$$

它们构成一个群，我们称此群为 Γ 矩阵群．它包含有 $g = 2\times 2^N$ 个独立元素．我们取消群的自身表

示是不可约的和么正的．由 (A1)，γ_j 也是厄米的．令

$$\gamma'_x = \gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_N. \tag{A3}$$

对于奇数 N，γ'_x 与所有的 γ_j 对易，因此它是常数矩阵．注意到 $\gamma'^2_x = \pm 1$，这样

$$\gamma'_x = \begin{cases}\pm 1, & N = 4n+1 \\ \pm i1, & N = 4n-1\end{cases} \tag{A4}$$

其中正负号只表示 γ_j 矩阵排列次序的不同，为确定起见，取正号．这样 Γ 群的秩为 $g = 2^N$，当

$$N = 4n+1;\quad g = 2^{N+1},$$

当

$$N = 4n-1,$$

但这时 Γ 矩阵群包含了四个常数矩阵．由 (A1) 知，除了常数矩阵外，Γ 矩阵群的元素的特征标为零．因此，不可约 γ_j 矩阵的维数 m 由下式决定

$$\sum_{g_j\in\Gamma}|\mathrm{Tr}(g_j)|^2 = \begin{cases}2m^2 \\ 2m^2 \\ 4m^2\end{cases} = g = \begin{cases}2^{N+1}, & N = 2n \\ 2^N, & N = 4n+1 \\ 2^{N+1}, & N = 4n-1\end{cases} \tag{A5}$$

$$\therefore\qquad m = \begin{cases}2^{N/2}, & N\ \text{为偶数} \\ 2^{(N-1)/2}, & N\ \text{为奇数}\end{cases} \tag{A6}$$

下面除特别声明，我们只讨论 $N = 2n$ 为偶数的情况．对 N 为奇数的情况在适当地方作几句说明．

可把 Γ 矩阵群元素分为两组矩阵，它们仅相差一个负号，取其中的一组，记作 Γ'．Γ' 的矩阵个数为 $2^N = m^2$，易证它们互相线性无关，并构成 $m\times m$ 矩阵的一个完备集．任何 $m\times m$ 矩阵 A 可以按它展开如下

$$A = \sum_{g_j\in\Gamma'} C_j g_j,$$

$$C_j = \frac{1}{m}\mathrm{Tr}(g_j^\dagger A). \tag{A7}$$

对于奇数 N，我们仍能得到类似关系．

等价定理：所有满足 (A1) 式的不可约的 γ_j 矩阵都彼此等价：

$$\bar{\gamma}_j = X^{-1}\gamma_j X. \tag{A8}$$

当 γ_j 和 $\bar{\gamma}_j$ 都是么正矩阵时，可取 X 为么正的，且行列式为 $+1$．这个定理的证明很简单，因为它们的特征标对应相等．对 N 为奇数的情形，为了使等价定理成立，还要附加条件

$$\bar{\gamma}'_x = \gamma'_x. \tag{A9}$$

例 1．若 $R\in SO(N)$，令 $\bar{\gamma}_j \equiv \gamma_i R_{ij}$，显然它满足 (A1) 式，故存在着么正和行列式为 1 的矩阵 $D(R)$，使得

$$D(R)\gamma_j D(R)^{-1} = \gamma_i R_{ij}. \tag{A10}$$

$D(R)$ 矩阵集构成 $SO(N)$ 群的一个表示，通常称它为旋量表示．这也适合 N 为奇数的情形．

例 2．令 $\bar{\gamma}_j = -\tilde{\gamma}_j$，其中弯弯表示矩阵取转置．存在着 B 矩阵，它满足

$$-\tilde{\gamma}_j = B^{-1}\gamma_j B,\quad \det B = +1,\quad B^+ = B^{-1}. \tag{A11}$$

由 (A11) 可知，$\tilde{B}B^{-1}$ 与所有 γ_j 矩阵对易，故必为常数矩阵，这样

$$\tilde{B} = kB,\quad k = \pm 1. \tag{A12}$$

不难证明

$$\widetilde{(g_\alpha B)} = (-1)^{\alpha(\alpha+1)/2}k(g_\alpha B). \tag{A13}$$

其中 g_α 是 α 个不相同的 γ 矩阵的乘积．因为 $g_\alpha B$ 构成一个完备集，其中对称矩阵的总数必须大于反对称矩阵的总数，我们得到

$$k = (-1)^{N(N+2)/8}. \tag{A14}$$

II. $SO(2n)$ 群的旋量表示　由(A10)已定义了 $SO(2n)$ 群的旋量表示。取无穷小变换

$$R_{ij}=\delta_{ij}+\alpha_{ij},\quad \alpha_{ij}=-\alpha_{ji},$$

我们就有

$$D(R)=1+\frac{i}{2}\alpha_{jk}I_{jk}. \tag{A15}$$

把它代入(A10)，得

$$i[I_{jk},\gamma_l]=\gamma_j\delta_{kl}-\gamma_k\delta_{jl}$$

这样得

$$I_{jk}=\frac{1}{4i}(\gamma_j\gamma_k-\gamma_k\gamma_j) \tag{A16}$$

I_{jk} 是厄米的，无迹的矩阵，并满足李代数 $SO(N)'$ 的对易关系

$$[I_{jk},I_{pq}]=-i(\delta_{kp}I_{jq}+\delta_{jq}I_{kp}-\delta_{jp}I_{kq}-\delta_{kq}I_{jp}). \tag{A17}$$

设 ψ 按旋量表示 $D(R)$ 变换

$$\psi\to\left(1+\frac{i}{2}\alpha_{jk}I_{jk}\right)\psi,\quad \psi^*\to\left(1-\frac{i}{2}\alpha_{jk}I_{jk}^*\right)\psi^*. \tag{A18}$$

因为

$$B\tilde{I}_{jk}B^{-1}=-I_{jk},$$

所以

$$BD^*(R)B^{-1}=D(R), \tag{A19}$$

也就是说，旋量表示 $D(R)$ 是实表示。这对 N 为奇数时也成立，但 $N=4l+1$ 时，要引进新的 B 矩阵来证明。

定义厄米的 γ_x 矩阵

$$\gamma_x\equiv(-i)^{N/2}\gamma_x'=(-i)^{N/2}\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_N,\quad \gamma_x^2=1, \tag{A20}$$

γ_x 可与所有生成元 I_{jk} 对易，可见，N 为偶数时，旋量表示 $D(R)$ 是可约的。引入投影算符

$$P_\pm=\frac{1}{2}(1\pm\gamma_x) \tag{A21}$$

和

$$\psi_\pm\equiv P_\pm\psi. \tag{A22}$$

$\psi_\pm$ 分别构成 $SO(2n)$ 的不变函数空间，对应的不可约表示分别记作 $D_\pm$，它们都是 $2^{(N/2)-1}$ 维。对 N 是奇数情形，γ_x 是常数矩阵，因此旋量表示是不可约的。这样 $SO(N)$ 群的不可约旋量表示的维数为

$$m'=\begin{cases}2^{(N/2)-1}, & N\text{ 为偶数}\\ 2^{(N-1)/2}. & N\text{ 为奇数}\end{cases} \tag{A23}$$

由

$$B^{-1}\gamma_x B=(-1)^{N(N-1)/2}\tilde{\gamma}_x, \tag{A24}$$

得

$$B(DP_\pm)^*B^{-1}=\begin{cases}DP_\pm, & N=4l,\\ DP_\mp. & N=4l+2.\end{cases} \tag{A25}$$

当 $N=4l$ 时，$D_\pm$ 分别都是实表示，但互不等价。当 $N=4l+2$ 时，D_+^* 与 D_- 等价。

我们把式(A23)，(A14)和(A24)的结果列表如下。

$SO(N)$,	$N=$	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
	$m'=$	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
$\tilde{B}=kB$,	$k=$	−1	−1	1	1	−1	−1	1	1	−1	−1	1
$B^{-1}\gamma_x B=k'\tilde{\gamma}_x$,	$k'=$	−1	1	−1	1	−1	1	−1	1	−1	1	−1

III. 由旋量场构造 $SO(N)$ 和 Lorentz 不变形式

设 $T^{\alpha}_{i_1\cdots i_\alpha}$ 是 $SO(N)$ 的 α 阶反对称张量.

在 $SO(N)$ 变换下，

$$T^{\alpha}_{i_1\cdots i_\alpha} \to R_{i_1 j_1}\cdots R_{i_\alpha j_\alpha} T^{\alpha}_{j_1\cdots j_\alpha} \tag{A26}$$

这里 $\alpha \leqslant \frac{N}{2}$，因为更高阶反对称张量可通过完全反对称张量 $\epsilon_{i_1\cdots i_N}$ 化为较低阶张量. 当 $\alpha = \frac{N}{2}$ 时，定义对耦张量

$$^*T^{N/2}_{i_1\cdots i_{N/2}} = \frac{(i)^{N/2}}{\left(\frac{N}{2}\right)!}\epsilon_{i_1\cdots i_N} T^{N/2}_{i_N\cdots i_{\frac{N}{2}+1}} \tag{A27}$$

从而 $T^{N/2}_{i_1\cdots i_{N/2}}$ 可以分解为自偶和反自耦的两个不变张量空间

$$T^{(1)}_{i_1\cdots i_{N/2}} = \frac{1}{2}\left[T^{N/2}_{i_1\cdots i_{N/2}} + {}^*T^{N/2}_{i_1\cdots i_{N/2}}\right]$$

$$T^{(2)}_{i_1\cdots i_{N/2}} = \frac{1}{2}\left[T^{N/2}_{i_1\cdots i_{N/2}} - {}^*T^{N/2}_{i_1\cdots i_{N/2}}\right] \tag{A28}$$

T^{α}, $T^{(1)}$ 和 $T^{(2)}$ 的对应的不可约表示矩阵分别记作 D^{α}, $D^{(1)}$ 和 $D^{(2)}$.

对应每一个张量 T^{α}，我们定义一个对应的矩阵

$$\hat{T} \equiv \frac{1}{\alpha!} T^{\alpha}_{i_1\cdots i_\alpha}\gamma_{i_1}\cdots\gamma_{i_\alpha},$$

$$T^{\alpha}_{i_1\cdots i_\alpha} = \frac{1}{m}\mathrm{Tr}[\hat{T}^{\alpha}(\gamma_{i_1}\cdots\gamma_{i_\alpha})^{+}]. \tag{A29}$$

由 (A10) 知，在 $SO(N)$ 变换下，

$$\hat{T} \to D(R)\hat{T}D(R)^{-1} \tag{A30}$$

由此可以写出由旋量和张量构成的两种 $SO(N)$ 和 Lorentz 不变量

$$\tilde{\psi}\hat{T}^{\alpha}P_{\pm}\psi = \begin{cases}\tilde{\psi}_{\pm}\hat{T}^{\alpha}\psi_{\pm}, & \alpha \text{ 为偶数}\\ \tilde{\psi}_{\mp}\hat{T}^{\alpha}\psi_{\pm}. & \alpha \text{ 为奇数}\end{cases} \tag{A31}$$

$$(\tilde{\psi}C^{-1})B^{-1}\hat{T}^{\alpha}P_{\pm}\psi = \begin{cases}(\tilde{\psi}_{\pm}C^{-1})B^{-1}\hat{T}^{\alpha}\psi_{\pm}, & \begin{matrix}N = 4l,\ \alpha \text{ 为偶数}\\ \text{或 } N = 4l+2,\ \alpha \text{ 为奇数}\end{matrix}\\ (\tilde{\psi}_{\mp}C^{-1})B^{-1}\hat{T}^{\alpha}\psi_{\pm}. & \begin{matrix}N = 4l,\ \alpha \text{ 为奇数}\\ \text{或 } N = 4l+2,\ \alpha \text{ 为偶数}.\end{matrix}\end{cases} \tag{A32}$$

这里 C 是 Dirac 电荷共轭变换矩阵. 由此，可得，当 $N = 4l$ 时，

$$\begin{aligned} D_{\pm}\times D_{\pm} &= D^0 + D^2 + \cdots + \begin{cases}D^{(1)}\\ D^{(2)}\end{cases},\\ D_{\mp}\times D_{\pm} &= D^1 + D^3 + \cdots + D^{(N/2)-1}.\end{aligned} \tag{A33}$$

当 $N = 4l + 2$ 时，

$$\begin{aligned} D^*_{\pm}\times D_{\pm} = D_{\mp}\times D_{\pm} &= D^0 + D^2 + \cdots + D^{(N/2)-1},\\ D^*_{\mp}\times D_{\pm} = D_{\pm}\times D_{\pm} &= D^1 + D^3 + \cdots + \begin{cases}D^{(1)}\\ D^{(2)}.\end{cases}\end{aligned} \tag{A34}$$

不难验证上面表式两端的表示维数是相等的. 对 N 是奇数情形类似地得到不变式，

$$\tilde{\psi}\hat{T}^{\alpha}\psi, \quad (\tilde{\psi}C^{-1})B^{-1}\hat{T}^{\alpha}\psi \tag{A35}$$

和

$$D \times D = D^*\times D = D^0 + D^1 + D^2 + \cdots + D^{(N-1)/2}. \tag{A36}$$

最后在表 1 至表 8 中给出几个低阶 $SO(N)$ 群的 γ 矩阵特定表象和生成元、γ_x, B 的具体形式. 所有的这些矩阵，都以泡里矩阵的直乘形式 $\sigma_1\times\sigma_2\cdots$ 给出. 在这些表中，x, y 和 z 表示 σ_x, σ_y 和 σ_z.

表 1 $SO(2)$, $m=2$

	σ_1
γ_1	x
γ_2	y
$2I_{12}$	z
γ_x	z
B	y

表 2 $SO(3)$, $m=2$

	σ_1
γ_1	x
γ_2	y
γ_3	z
$2I_{12}$	z
γ_x	$i1$
B	y

表 3 $SO(4)$, $m=4$

	σ_1	σ_2
γ_1	x	1
γ_2	y	z
γ_3	y	x
γ_4	y	y
$2I_{12}$	z	z
$2I_{34}$	1	z
γ_x	z	1
B	z	y

表 4 $SO(6)$, $m=8$

	σ_1	σ_2	σ_3
γ_1	x	y	z
γ_2	y	y	1
γ_3	x	y	x
γ_4	y	x	y
γ_5	x	1	y
γ_6	y	z	y
$2I_{12}$	z	1	z
$2I_{34}$	z	z	z
$2I_{56}$	z	z	1
γ_x	z	1	1
B	x	1	1

表 5 $SO(8)$, $m=16$

	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4
γ_1	y	x	1	1
γ_2	y	y	1	1
γ_3	x	1	y	z
γ_4	y	z	y	1
γ_5	x	1	y	x
γ_6	y	z	x	y
γ_7	x	1	1	y
γ_8	y	z	z	y
$2I_{12}$	1	z	1	1
$2I_{34}$	z	z	1	z
$2I_{56}$	z	z	z	z
$2I_{78}$	z	z	z	1
γ_x	z	1	1	1
B	1	x	1	1

表 6 $SO(10)$, $m=32$

	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5		σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5
γ_1	x	y	x	1	1	$\gamma_{\bar{0}}$	y	z	y	z	y
γ_2	y	x	y	1	1	$2I_{12}$	z	z	z	1	1
γ_3	x	y	z	1	1	$2I_{34}$	z	1	z	1	1
γ_4	y	y	1	1	1	$2I_{56}$	z	z	1	1	z
γ_5	x	1	y	y	z	$2I_{78}$	z	z	1	z	z
γ_6	y	z	y	y	1	$2I_{9\bar{0}}$	z	z	1	z	1
γ_7	x	1	y	y	x	γ_x	z	1	1	1	1
γ_8	y	z	y	x	y	B	y	z	1	1	1
γ_9	x	1	y	1	y						

表 7　$SO(12)$，$m = 64$

	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6
γ_1	y	x	1	1	1	1
γ_2	y	y	1	1	1	1
γ_3	x	1	y	x	1	1
γ_4	y	z	x	y	1	1
γ_5	x	1	y	z	1	1
γ_6	y	z	y	1	1	1
γ_7	x	1	1	y	y	z
γ_8	y	z	z	y	y	1
γ_9	x	1	1	y	y	x
$\gamma_{\bar{0}}$	y	z	z	y	x	y
$\gamma_{\bar{1}}$	x	1	1	y	1	y
$\gamma_{\bar{2}}$	y	z	z	y	z	y
$2I_{12}$	1	z	1	1	1	1
$2I_{34}$	z	z	z	z	1	1
$2I_{56}$	z	z	1	z	1	1
$2I_{78}$	z	z	z	1	1	z
$2I_{9\bar{0}}$	z	z	z	1	z	z
$2_{\bar{1}\bar{2}}$	z	z	z	1	z	1
γ_x	z	1	1	1	1	1
B	z	y	z	1	1	1

表 8　$SO(14)$，$m = 128$

	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6	σ_7
γ_1	x	y	1	1	x	1	1
γ_2	y	x	1	1	y	1	1
γ_3	x	y	1	1	z	1	1
γ_4	y	y	1	1	1	1	1
γ_5	x	1	1	y	y	y	z
γ_6	y	z	z	y	y	y	1
γ_7	x	1	1	y	y	y	x
γ_8	y	z	z	y	y	x	y
γ_9	x	1	1	y	y	1	y
$\gamma_{\bar{0}}$	y	z	z	y	y	z	y
$\gamma_{\bar{1}}$	x	1	y	z	y	1	1
$\gamma_{\bar{2}}$	y	z	y	1	y	1	1
$\gamma_{\bar{3}}$	x	1	y	x	y	1	1
$\gamma_{\bar{4}}$	y	z	x	y	y	1	1
$2I_{12}$	z	z	1	1	z	1	1
$2I_{34}$	z	1	1	1	z	1	1
$2I_{56}$	z	z	z	1	1	1	z
$2I_{78}$	z	z	z	1	1	z	z
$2I_{9\bar{0}}$	z	z	z	1	1	z	1
$2I_{\bar{1}\bar{2}}$	z	z	1	z	1	1	1
$2I_{\bar{3}\bar{4}}$	z	z	z	z	1	1	1
γ_x	z	1	1	1	1	1	1
B	x	1	z	1	1	1	1

附录 B　$SO(14)$ 群旋量表示

表 8 中已给出了 $SO(14)$ Cartan 子代数生成元的形式，它们与子群 $SU_C(4)$，$SU_L(2)$，$SU_R(2)$，$SU'_L(2)$，$SU'_R(2)$ 的生成元的关系由下面一些式子给出

$$T_1^C = \frac{1}{\sqrt{2}}(-I_{67} - I_{58}),\quad T_2^C = \frac{1}{\sqrt{2}}(I_{57} - I_{68}),\quad T_3^C = \frac{1}{\sqrt{2}}(I_{78} + I_{56}),$$

$$T_4^C = \frac{1}{\sqrt{2}}(-I_{89} - I_{7\bar{0}}),\quad T_5^C = \frac{1}{\sqrt{2}}(-I_{8\bar{0}} + I_{79}),\quad T_6^C = \frac{1}{\sqrt{2}}(I_{5\bar{0}} - I_{69}),$$

$$T_7^C = \frac{1}{\sqrt{2}}(-I_{59} - I_{6\bar{0}}),\quad T_8^C = \frac{1}{\sqrt{6}}(-I_{56} + I_{78} + 2I_{9\bar{0}}),\quad T_9^C = \frac{1}{\sqrt{2}}(I_{5\bar{0}} + I_{69}),$$

$$T_{10}^C = \frac{1}{\sqrt{2}}(-I_{59} + I_{6\bar{0}}),\quad T_{11}^C = \frac{1}{\sqrt{2}}(-I_{89} + I_{7\bar{0}}),\quad T_{12}^C = \frac{1}{\sqrt{2}}(-I_{8\bar{0}} - I_{79}),$$

$$T_{13}^C = \frac{1}{\sqrt{2}}(-I_{67} + I_{58}),\quad T_{14}^C = \frac{1}{\sqrt{2}}(I_{57} + I_{68}),\quad T_{15}^C = \frac{1}{\sqrt{3}}(I_{56} - I_{78} + I_{9\bar{0}});$$

$$T_1^L = \frac{1}{\sqrt{2}}(I_{23} + I_{14}),\quad T_2^L = \frac{1}{\sqrt{2}}(I_{31} + I_{24}),\quad T_3^L = \frac{1}{\sqrt{2}}(I_{12} + I_{34}),$$

$$T_1^R = \frac{1}{\sqrt{2}}(I_{23} - I_{14}),\quad T_2^R = \frac{1}{\sqrt{2}}(I_{31} - I_{24}),\quad T_3^R = \frac{1}{\sqrt{2}}(I_{12} - I_{34}),$$

$$T_1^{L'} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-I_{\bar{2}\bar{3}} - I_{\bar{1}\bar{4}}),\quad T_2^{L'} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-I_{\bar{3}\bar{1}} - I_{\bar{2}\bar{4}}),\quad T_3^{L'} = \frac{1}{\sqrt{2}}(I_{\bar{1}\bar{2}} + I_{\bar{3}\bar{4}})$$

$$T_1^{R'}=\frac{1}{\sqrt{2}}(I_{\bar{3}\bar{3}}-I_{\bar{1}\bar{4}}),\quad T_2^{R'}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-I_{\bar{3}\bar{1}}+I_{\bar{2}\bar{4}}),\quad T_3^{R'}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-I_{\bar{1}\bar{2}}+I_{\bar{3}\bar{4}});$$

$$Q=\frac{1}{\sqrt{2}}T_3^L+\frac{1}{\sqrt{2}}T_3^R+\frac{1}{\sqrt{3}}T_{15}^C,\quad Q_1^Z=-\sqrt{\frac{5}{8}}T_3^L+\frac{3}{2\sqrt{10}}T_3^R+\frac{\sqrt{15}}{10}T_{15}^C,$$

$$Q_2^Z=T_3^{R'},\quad Q_3^Z=\sqrt{\frac{3}{5}}T_{15}^C-\sqrt{\frac{2}{5}}T_3^R,\quad Q_4^Z=T_3^{L'};$$

$$I_{12}=\frac{1}{\sqrt{2}}(T_3^L+T_3^R),\quad I_{34}=\frac{1}{\sqrt{2}}(T_3^L-T_3^R),$$

$$I_{56}=\frac{1}{\sqrt{2}}T_3^C-\frac{1}{\sqrt{6}}T_8^C+\frac{1}{\sqrt{3}}T_{15}^C,\quad I_{78}=\frac{1}{\sqrt{2}}T_3^C+\frac{1}{\sqrt{6}}T_8^C-\frac{1}{\sqrt{3}}T_{15}^C$$

$$I_{9\bar{0}}=\sqrt{\frac{2}{3}}T_8^C+\frac{1}{\sqrt{3}}T_{15}^C,\quad I_{\bar{1}\bar{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(T_3^{L'}-T_3^{R'}),\quad I_{\bar{3}\bar{4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(T_3^{L'}+T_3^{R'}).$$

规范场有完全相同的组合方式．在模型A和模型C中，光子场为

$$A_\mu=\sqrt{\frac{3}{8}}A_{3\mu}^L+\sqrt{\frac{3}{8}}A_{3\mu}^R+\frac{1}{2}A_{15\mu}^C.$$

在 $SO(14)$ 的矢量表示中，这些子群的生成元如下．$SU(2)_L\times SU(2)_R$ 只涉及到1—4行和1—4列

$$T_1^L=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&0&0&-i\\0&0&-i&0\\0&i&0&0\\i&0&0&0\end{bmatrix},\quad T_2^L=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&0&i&0\\0&0&0&-i\\-i&0&0&0\\0&i&0&0\end{bmatrix},$$

$$T_3^L=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&-i&0&0\\i&0&0&0\\0&0&0&-i\\0&0&i&0\end{bmatrix},\quad T_1^R=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&0&0&i\\0&0&-i&0\\0&i&0&0\\-i&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$T_2^R=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&0&i&0\\0&0&0&i\\-i&0&0&0\\0&-i&0&0\end{bmatrix},\quad T_3^R=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&-i&0&0\\i&0&0&0\\0&0&0&i\\0&0&-i&0\end{bmatrix}.$$

$SU(4)$ 只涉及到5—10行和5—10列

$$T_1^C=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&0&0&i&0&0\\0&0&i&0&0&0\\0&-i&0&0&0&0\\-i&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix},\quad T_2^C=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&0&-i&0&0&0\\0&0&0&i&0&0\\i&0&0&0&0&0\\0&-i&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$T_3^C=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&-i&0&0&0&0\\i&0&0&0&0&0\\0&0&0&-i&0&0\\0&0&i&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix},\quad T_4^C=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&i\\0&0&0&0&i&0\\0&0&0&-i&0&0\\0&0&-i&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$T_5^C=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&-i&0\\0&0&0&0&0&i\\0&0&i&0&0&0\\0&0&0&-i&0&0\end{bmatrix},\quad T_6^C=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&-i\\0&0&0&0&i&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&-i&0&0&0&0\\i&0&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$T_7^C=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&0&0&0&i&0\\0&0&0&0&0&i\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\-i&0&0&0&0&0\\0&-i&0&0&0&0\end{bmatrix},\quad T_8^C=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}0&i&0&0&0&0\\-i&0&0&0&0&0\\0&0&0&-i&0&0\\0&0&i&0&0&0\\0&0&0&0&0&-2i\\0&0&0&0&2i&0\end{bmatrix},$$

$$T_9^C=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&-i\\0&0&0&0&-i&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&i&0&0&0&0\\i&0&0&0&0&0\end{bmatrix},\quad T_{10}^C=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&0&0&0&i&0\\0&0&0&0&0&-i\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\-i&0&0&0&0&0\\0&i&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$T_{11}^C=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&-i\\0&0&0&0&i&0\\0&0&0&-i&0&0\\0&0&i&0&0&0\end{bmatrix},\quad T_{12}^C=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&i&0\\0&0&0&0&0&i\\0&0&-i&0&0&0\\0&0&0&-i&0&0\end{bmatrix},$$

$$T_{13}^C=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&0&0&-i&0&0\\0&0&i&0&0&0\\0&-i&0&0&0&0\\i&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix},\quad T_{14}^C=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&0&-i&0&0&0\\0&0&0&-i&0&0\\i&0&0&0&0&0\\0&i&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$T_{15}^C=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&-i&0&0&0&0\\i&0&0&0&0&0\\0&0&0&i&0&0\\0&0&-i&0&0&0\\0&0&0&0&0&-i\\0&0&0&0&i&0\end{bmatrix}.$$

$SU(2)'_L\times SU(2)'_R$ 只涉及到 11—14 行和 11—14 列。

$$T_1^{L'}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&0&0&i\\0&0&i&0\\0&-i&0&0\\-i&0&0&0\end{bmatrix},\quad T_2^{L'}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&0&-i&0\\0&0&0&i\\i&0&0&0\\0&-i&0&0\end{bmatrix},$$

$$T_3^{L'} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \quad T_1^{R'} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$T_2^{R'} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad T_3^{R'} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{bmatrix}.$$

模型A和B中的电荷算子分别为

$$Q_A = \begin{bmatrix} Q(1) & & \\ & Q(2) & \\ & & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_B = \begin{bmatrix} Q(1) & & \\ & Q(2) & \\ & & Q(3) \end{bmatrix},$$

$$Q(1) = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q(2) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \end{bmatrix},$$

$$Q(3) = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{bmatrix}$$

在我们的模型中,费米子填充在 $SO(14)$ 64 维旋量表示 ψ_+ 中,由它和 Higgs 张量场构成的不变形式有两类

$$(\tilde{\psi}_+ C^{-1}) B^{-1} \hat{T}^\alpha \psi_+, \quad \alpha \text{ 为奇数} \tag{B1}$$

$$\tilde{\psi}_+ \hat{T}^\alpha \psi_+. \quad \alpha \text{ 为偶数} \tag{B2}$$

$\alpha = 1$ 或 5 时,$B^{-1}\hat{T}^\alpha$ 是反对称的,所以一阶和五阶的 Higgs 张量对费米子质量没有贡献,费米子只能从三阶和七阶 Higgs 张量处获得质量. 在模型A和模型B中,ψ_+ 都是左手的态,因此(B2)式为零,(B2)不对费米子质量有贡献. 而 $\bar{\psi}_+ \gamma_\mu D^\mu \psi_+$ 给出规范场与费米子场的相互作用. 在模型C的情形,(B2)将提供一、二代与三、四代之间的质量混合.

参 考 文 献

[1] S. L. Glashow, *Nucl. Phys.*, **22**(1961), 579; S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.*, **19**(1967); 1264; A. Salam. Proc. of the 8th Nobel Symposium, Stockholm 1968, ed. by N. Svartholm, p. 367.

[2] J. C. Pati and A. Salam, *Phys. Rev. Lett.*, **31**(1973), 661; H. Georgi and S. L. Glashow, *Phys. Rev. Lett.*, **32**(1974), 438.; J. C. Pati and A. Salam, *Phys. Rev.*, **D10**(1974), 275; H. Fritzsch and P. Minkowski, *Ann. Phys.*, **93**(1975), 193; *Nucl. Phys.*, **B103**(1976), 61; H. Georgi, Particles and Fields, 1974 (APS/DPF Williamsburg), ed. C. E. Carlson (AIP, New York, 1975), p. 575; S. L. Glashow, Harvard Preprint HUTP-77/A005 (1977); M. S. Chanowitz, J. Ellis and M. K. Gaillard, *Nucl. Phys.*, **B128**(1977), 506. There is an appendix; Tensor Formulation of $SO(10)$.

[3] Z. Q. Ma, T. S. Tu, P. Y. Xue and Z. W. Yue, BIHEP-TH-1, 1980.

[4] Z. Q. Ma, T. S. Tu, P. Y. Xue and Z. W. Yue, BIHEP-TH-2, 1980.

[5] H. Georgi, HUTP-79/A013(1979); H. Georgi, *Nucl. Phys.*, **B156**(1979), 126; R. Barbieri and D. V. Nanopoulos, Ref. TH, 2810—CERN (1980).

[6] J. Kirkby, Proc. of the 1979 International Symposium on Lepton and Photon Interaction at High

Energies, Batavia, 1979, SLAC-PUB-2419.
[7] J. Banks and H. Georgi, *Phys. Rev.*, **D14**(1976), 1159; S. Okubo, *Phys. Rev.*, **D16**(1977), 3528.
[8] H. Georgi and D. V. Nanopoulos, *Phys. Lett*, **82B**(1979), 392.
[9] K. C. Chou and C. S. Gao, SLAC-PUB-2445, 1979.
[10] D. P. Barber et al., "The first year of Mark J at PETRA" (1980).
[11] S. Weinberg, *Phys. Rev.*, **D7**(1973), 1068.
[12] H. Georgi, H. R. Quinn and S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.*, **33**(1974), 451.
[13] M. Gell-Mann and F. E. Low, *Phys. Rev.*, **95**(1954), 1300; C. G. Callan, *Phys. Rev.*, **D2**(1970), 1541.
[14] L. Hall, HUTP-80/A024

GENERATION PROBLEM AND $SO(14)$ GRAND UNIFIED THEORIES

MA ZHONG-QI DU DONG-SHENG XUE PEI-YOU ZHOU XIAN-JIAN
(*Institute of High Energy Physics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

Three models of grand unified theory based on $SO(14)$ gauge group are proposed. They can accommodate four generations of odinary fermions. Model A, where the charged weak currents of the fermions in the first and second generations are $V-A$ and that of the fermions in the third and fourth generations are $V+A$, is a natural model from the point of view of structure of $SO(14)$. In model B, we obtain the nice value of Weinberg angle: $\sin^2\theta_W = 0.225$ and the masses of $W^{\pm}$ and the ordinary Z^0 are a factor 1.7 larger than those in $SU(5)$ standard model. Model B predicts another neutral vector boson which couples with the fermions in the first two generations like a heavy photon with the mass of the order of 100 GeV. The coupling of $\tau-\nu_\tau$ in model B is $V-A$. All light fermions in model C have left-handed charged weak current. All these models can accommodate mass relations: $m_e \cdot m_\mu \sim m_d \cdot m_s$, $m_\mu \sim 3m_s$, $m_\tau \sim m_b$ and give the first Cabibbo angle $\sin\theta_1 = \sqrt{\dfrac{m_d}{m_s}}$.