第5卷 第2期 高能物理与核物理 Vol. 5, No. 2
1981年3月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS March, 1981

SU_3 群 Wigner 算符的作用

曾高坚
(湖南师范学院)

摘要

本文运用作者关于 SU_3 群 C-G 级数的公式，全面地论述了 SU_3 群 Wigner 算符的作用，分析了 SU_3 群 C-G 级数中重数的分布规律和确定了 SU_3 群 Wigner 算符的零空间.

计算有重数情形下 SU_3, U_3 群的 Wigner 系数，至今仍是一个没有根本解决的问题. 分析 SU_3, U_3 群 C-G 级数中重数的分布规律和确定 SU_3, U_3 群 Wigner 算符的零空间，对这一问题的解决可能提供重要信息.

关于 SU_3, U_3 群的 C-G 级数中重数分布规律的分析已有不少工作，可以举出文献[1—3]作为例子. L. C. Biedenharn 和 J. D. Louck 的分析具有普遍性特点，而且结论也比较明确；特别是他们将 U_3 群 C-G 级数中的多重性同 U_3 群 Wigner 算符的多重性联系了起来，并以此决定了 U_3 群 Wigner 算符的零空间. 他们工作的缺点是所有关节量都未作出统一表达，因而结果是零散的，不便于一般分析和实际应用.

本文运用作者关于 SU_3 群 C-G 级数的公式[4]，详细地论述了 SU_3 群 Wigner 算符的作用，分析了 SU_3 群 C-G 级数中重数的分布规律，确定了 SU_3 群 Wigner 算符的零空间的一般形式. 本文对结果的表达是明确的和统一的. 可以直接运用本文的结果去判定 SU_3 群 Wigner 系数的非零条件和探讨它可能的形式. 另外，我们要指出，只要稍加推广，便可将本文结果用于一般 U_3 群.

本文第一节引用了作者关于 SU_3 群 C-G 级数的公式，第二节描述了 SU_3 群 Wigner 算符的多重性结构，第三节详细地论述了 SU_3 群 Wigner 算符的作用，是本文的主要部分.

一、SU_3 群的 C-G 级数

我们已经证明了[4]:

定理 1: 在 SU_3 群 C-G 级数

$$R(\lambda_1\mu_1)\otimes R(\lambda_2\mu_2)=\sum_{(\lambda\mu)}\oplus N(\lambda\mu)R(\lambda\mu) \tag{1.1}$$

本文 1979 年 7 月 24 日收到.

中，$R(\lambda\mu)$ 由下式决定:

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 - n - 2k, \quad \mu = \mu_1 + \mu_2 - n + k. \tag{1.2}$$

式中 n, k 为整数，决定于

$$0 \leqslant n \leqslant n_{\max}, \tag{1.3}$$

$$n_{\max} = \min\left[\lambda_1 + \mu_1, \lambda_2 + \mu_2, \mu_1 + \mu_2, \frac{1}{2}(\lambda_1 + 2\mu_1 + \mu_2),\right.$$
$$\left.\frac{1}{2}(\lambda_2 + 2\mu_2 + \mu_1), \frac{1}{3}(\lambda_1 + 2\mu_1 + \lambda_2 + 2\mu_2)\right];$$

$$k_{\min} \leqslant k \leqslant k_{\max}, \tag{1.4}$$

$$k_{\min} = -\min[(n - \mu_1)y(\mu_1 - n) + \mu_1, (n - \mu_2)y(\mu_2 - n) + \mu_2, \mu_1 + \mu_2 - n],$$

$$k_{\max} = \min\left[\lambda_1 + \mu_1 + (n - \mu_1)y(\mu_1 - n) - n,\right.$$
$$\left.\lambda_2 + \mu_2 + (n - \mu_2)y(\mu_2 - n) - n, \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 - n)\right],$$

$$y(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \tag{1.5}$$

而 $R(\lambda\mu)$ 的重数为

$$\begin{aligned} N = n &+ 1 - (n - \mu_1)y(n - \mu_1 - 1) - (n - \mu_2)y(n - \mu_2 - 1) + k[1 - y(k)] \\ &- y(\mu_2 - n)(k + n - \lambda_1)y(k + n - \lambda_1) - y(\mu_1 - n)(k + n - \lambda_2) \\ &y(k + n - \lambda_2) - y(n - \mu_2 - 1)(k - \lambda_1 + \mu_2)y(k - \lambda_1 + \mu_2) \\ &- y(n - \mu_1 - 1)(k - \lambda_2 + \mu_1)y(k - \lambda_2 + \mu_1). \end{aligned} \tag{1.6}$$

(1.6) 式中的 n 和 k 可由 (1.2) 决定为

$$n = \frac{1}{3}[(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda) + 2(\mu_1 + \mu_2 - \mu)],$$

$$k = \frac{1}{3}[(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda) - (\mu_1 + \mu_2 - \mu)]. \tag{1.7}$$

这个结果是非常优美的，而且用起来也很方便，因为其中的运算都是极为简单的。

本文目的就是运用这个 C-G 级数公式来研究 SU_3 群 Wigner 算符的作用，分析 SU_3 群 C-G 级数中重数的分布规律和确定 SU_3 群 Wigner 算符的零空间。

二、SU_3 群 Wigner 算符的等价类

首先，我们简单阐述一下有关 SU_3 群 Wigner 算符的某些性质。

我们采用 Gel'fand 记号[5]. 依据这种记号，SU_3 群的不可约表示可用三个整数 $[m_{13}, m_{23}, 0]$ 表示，这里 $m_{13} \geqslant m_{23} \geqslant 0$. 其基矢则用

$$\left|\begin{matrix}[m_{13}, m_{23}, 0] \\ (m)\end{matrix}\right\rangle \tag{2.1}$$

表示，这里 (m) 是排成三角形式的三个整数的简写。

SU_3 群的 Wigner 算符，采用 Gel'fand 记号，可取形式[5]

$$\left\langle \begin{matrix} \Gamma_{11} \\ \Gamma_{12} \quad \Gamma_{22} \\ [M_{13},\ M_{23},\ 0] \\ (M) \end{matrix} \right\rangle. \tag{2.2}$$

这里 $[M_{13}, M_{23}, 0]$ 是 SU_3 群某个不可约表示. 可以叫 (2.2) 为属于某一不可约表示 $[M_{13}, M_{23}, 0]$ 的 Wigner 算符. 算符的上半部分叫算符阵，其整数满足关系：$M_{13} \geqslant \Gamma_{12} \geqslant M_{23} \geqslant \Gamma_{22} \geqslant 0$，$\Gamma_{12} \geqslant \Gamma_{11} \geqslant \Gamma_{22} \geqslant 0$. 下半部分叫 Gel'fand 阵，它也是由排成三角形式的三个整数构成. 由算符阵可构成三个数

$$W_1' = \Gamma_{11}, \quad W_2' = \Gamma_{12} + \Gamma_{22} - \Gamma_{11}, \quad W_3' = M_{13} + M_{23} - \Gamma_{12} - \Gamma_{22}, \tag{2.3}$$

它们叫 Wigner 算符 (2.2) 的"δ 阵" (delta).

从 (2.3) 可见，Wigner 算符 (2.2) 的 δ 阵，没有将算符阵唯一确定，即不同的算符阵可以有相同的 δ 阵，它们的差别仅在于 Γ_{12} 或 Γ_{22} 不同，但和 $\Gamma_{12} + \Gamma_{22}$ 是相同的. 我们把具有相同 δ 阵的 Wigner 算符叫做一个等价类. 在一个等价类中，算符可以有好几个.

Wigner 算符 (2.2) 有哪些可能的等价类？为了回答这个问题，我们来研究一下，W_1'，W_2' 可能取哪一些数值. 由 (Γ) 满足的条件，显然，$W_1' = \Gamma_{11}$ 可取满足 $0 \leqslant W_1' \leqslant M_{13}$ 的一切数值. 至于 W_2'，由(2.3)第二式，我们有 $M_{23} + \Gamma_{22} - W_1' \leqslant W_2' \leqslant M_{13} + \Gamma_{22} - W_1'$. 如果 $W_1' \geqslant M_{23}$，因为 $\Gamma_{22} \leqslant M_{23}$，$\Gamma_{22}$ 的最大值可取为 M_{23}；又因为 W_2' 不能为负值，Γ_{22} 的最小值只能取为 $\Gamma_{22} = W_1' - M_{23}$，这样 $0 \leqslant W_2' \leqslant M_{13} + M_{23} - W_1'$，如果 $W_1' < M_{23}$，因为 $\Gamma_{22} \leqslant \Gamma_{11} = W_1'$，$\Gamma_{22}$ 的最大值只能取为 W_1'，又因为 $M_{23} - W_1'$ 为正值，Γ_{22} 的最小值可取为 0，这样，$M_{23} - W_1' \leqslant W_2' \leqslant M_{13}$. 总之，Wigner 算符 (2.2) 有这样一些可能的等价类，它们的 δ 阵满足

$$0 \leqslant W_1' \leqslant M_{13},$$
$$(W_1' - M_{23})[y(W_1' - M_{23}) - 1] \leqslant W_2' \leqslant M_{13} - (W_1' - M_{23})y(W_1' - M_{23}), \tag{2.4}$$

很容易算出这些等价类的总数目.

已经指出，在一个等价类中，算符可以有好几个. 如果令 $\Gamma_{12}^{\gtrless}$，$\Gamma_{12}^{\lessgtr}$ 表示 Γ_{12} 的最大值和最小值，则一个等价类中算符的总数目为

$$N' = \Gamma_{12}^{\gtrless} - \Gamma_{12}^{\lessgtr} + 1, \tag{2.5}$$

$\Gamma_{12}^{\gtrless}$，和 $\Gamma_{12}^{\lessgtr}$ 的数值是不难求出的. 例如由 $\Gamma_{12} = M_{13} + M_{23} - W_3' - \Gamma_{22}$，如果 $W_3' \geqslant M_{23}$，则取 $\Gamma_{22} = 0$ 便得 Γ_{12} 的最大值 $\Gamma_{12}^{\gtrless} = M_{13} + M_{23} - W_3' = W_1' + W_2'$；如果 $W_3' < M_{23}$，则不能取 Γ_{22} 为 0，否则 $\Gamma_{12} \geqslant M_{13}$，这时应取 $\Gamma_{22} = M_{23} - W_3'$，因而 $\Gamma_{12}^{\gtrless} = M_{13}$. 用同样的论证方法可以求出 $\Gamma_{12}^{\lessgtr}$. 我们将各个情况下的 $\Gamma_{12}^{\gtrless}$，$\Gamma_{12}^{\lessgtr}$ 的数值列在表 1 内. 根据这个结果，可以将 $\Gamma_{12}^{\gtrless}$，$\Gamma_{12}^{\lessgtr}$ 统一表成

$$\Gamma_{12}^{\gtrless} = M_{13} - (W_3' - M_{23})y(W_3' - M_{23}),$$
$$\Gamma_{12}^{\lessgtr} = M_{23} + (W_1' - M_{23})y(W_1' - M_{23}) + (W_2' - M_{23})y(W_2' - M_{23}) \tag{2.6}$$

这样，

$$N' = M_{13} - M_{23} + 1 - (W_1' - M_{23})y(W_1' - M_{23}) - (W_2' - M_{23})y(W_2' - M_{23}) - (W_3' - M_{23})y(W_3' - M_{23}) \tag{2.7}$$

表 1

情况			$\Gamma^{>}_{12}$	$\Gamma^{<}_{12}$	N'
$W'_1 \geqslant M_{23}$	$W'_2 \geqslant M_{23}$	$W'_3 \geqslant M_{23}$	$W'_1 + W'_2$	$M_{13} - W'_3$	$M_{23} + 1$
		$W'_3 < M_{23}$	M_{13}	$M_{13} - W'_3$	$W'_3 + 1$
	$W'_2 < M_{23}$	$W'_3 \geqslant M_{23}$	$W'_1 + W'_2$	W'_1	$W'_2 + 1$
		$W'_3 < M_{23}$	M_{13}	W'_1	$M_{13} - W'_1 + 1$
$W'_1 < M_{23}$	$W'_2 \geqslant M_{23}$	$W'_3 \geqslant M_{23}$	$W'_1 + W'_2$	W'_2	$W'_1 + 1$
		$W'_3 < M_{23}$	M_{13}	W'_2	$M_{13} - W'_2 + 1$
	$W'_2 < M_{23}$	$W'_3 \geqslant M_{23}$	$W'_1 + W'_2$	M_{23}	$M_{13} - W'_3 + 1$
		$W'_3 < M_{23}$	M_{13}	M_{23}	$M_{13} - M_{23} + 1$

总结一下这节的概念是：属于不可约表示$[M_{13}M_{23}0]$的 Wigner 算符(2.2)包括若干个等价类，其 δ 阵由(2.4)决定；而每一等价类中又包括若干个算符，其数目由(2.7)决定.

三、SU_3 群 Wigner 算符的作用

现在，我们将属于不可约表示 $[M_{13}M_{23}0]$ 空间的 Wigner 算符 (2.2) 作用于不可约表示 $[m_{13}m_{23}0]$ 的空间上

$$\left\langle \begin{matrix} (\Gamma) \\ [M_{13}M_{23}0] \\ (M) \end{matrix} \right\rangle \left| \begin{matrix} [m_{13}m_{23}0] \\ (m) \end{matrix} \right\rangle, \tag{3.1}$$

我们要详细地研究这种作用.

1. Wigner 算符对一给定不可约表示空间作用的总效果

Wigner 算符 (2.2) 对一给定不可约表示 $[m_{13}m_{23}0]$ 空间作用的总效果是将它变到一系列不可约表示 $[m'_{13}m'_{23}0]$ 空间中去. 确定这一系列不可约表示 $[m'_{13}m'_{23}0]$ 空间和它出现的次数这一问题等价于去确定 SU_3 群 C-G 级数

$$[m_{13}m_{23}0] \otimes [M_{13}M_{23}0] = \Sigma \oplus N(m'_{13}m'_{23}0)[m'_{13}m'_{23}0] \tag{3.2}$$

中的不可约表示 $[m'_{13}m'_{23}0]$ 及其重数.

运用 SU_3 群不可约表示的两种表征 $R(\lambda\mu)$ 和 $[m_{13}m_{23}0]$ 之间的关系[6]

$$m_{13} = \lambda + \mu, \quad m_{23} = \lambda. \tag{3.3}$$

在 (1.1)—(1.7) 中，分别以 $[m_{13}m_{23}0]$，$[M_{13}M_{23}0]$ 和 $[m'_{13}m'_{23}0]$ 代替 $R(\lambda_1\mu_1)$，$R(\lambda_2\mu_2)$ 和 $R(\lambda\mu)$，即可解决上述问题.

2. Wigner 算符中不同等价类对一给定不可约表示空间的作用

Wigner 算符 (2.2) 包含若干等价类. 这些等价类对一给定不可约表示 $[m_{13}m_{23}0]$ 空间的作用并非相同，即不同的等价类要将$[m_{13}m_{23}0]$空间变到不同的不可约表示空间中去，有的还要将$[m_{13}m_{23}0]$ 空间化为零.

如果在前面的 C-G 级数公式 (1.1)—(1.7) 中，改用 Gel'fand 记号，即作代换 (3.3)，

并将整数 n 和 k 用 Wigner 算符 (2.2) 的 δ 阵来表示，则可清楚地看出这一点。

事实上，在 (1.2) 中作代换 (3.3)，便得：

$$m'_{13} = m_{13} + M_{13} - 2n - k, \quad m'_{23} = m_{23} + M_{23} - n - 2k. \tag{3.4}$$

另一方面，我们知道，当将 $[m'_{13}m'_{23}0]$ 空间的基矢用 $[m_{13}m_{23}0]$ 和 $[M_{13}M_{23}0]$ 空间的基矢表示时，变换系数就是 Wigner 系数

$$\left\langle \begin{matrix}[m'_{13}m'_{23}0]\\(m')\end{matrix} \middle| \left\langle \begin{matrix}(\Gamma)\\ [M_{13}M_{23}0]\\(M)\end{matrix}\right\rangle \middle| \begin{matrix}[m_{13}m_{23}0]\\(m)\end{matrix}\right\rangle. \tag{3.5}$$

这里[5]

$$m'_{13} = m_{13} + W'_1 - W'_3, \quad m'_{23} = m_{23} + W'_2 - W'_3. \tag{3.6}$$

比较 (3.4) 和 (3.6)，则得：

$$n = M_{13} - W'_1, \quad k = M_{23} - W'_2. \tag{3.7}$$

在 (1.1)—(1.7) 中作代换 (3.3) 和 (3.7)，便可将定理 1 以新的记号重述一遍，特别是注意到关于 n 和 k 的条件化成了关于 W'_1 和 W'_2 的条件，我们即可得到下面的重要结论。

定理 2： Wigner 算符 (2.2)，只有当它的 δ 阵既满足

$$\begin{gathered} 0 \leqslant W'_1 \leqslant M_{13}, \\ (W'_1 - M_{23})[y(W'_1 - M_{23}) - 1] \leqslant W'_2 \leqslant M_{13} - (W'_1 - M_{23})y(W'_1 - M_{23}), \end{gathered} \tag{3.8a}$$

同时又满足

$$\begin{cases} W'_1 \geqslant \max\left[M_{13} - m_{13}, M_{23} - m_{13} + m_{23}, \dfrac{1}{2}(M_{13} + M_{23} - 2m_{13} + m_{23})\right], \\ W'_2 \leqslant \min[m_{13} - m_{23} + W'_1, M_{23} + m_{13} - m_{23} - (m_{13} - m_{23} - M_{13} \\ \qquad + W'_1)y(m_{13} - m_{23} - M_{13} + W'_1)], \\ W'_2 \geqslant \max\left[\dfrac{1}{2}(M_{13} + M_{23} - W'_1 - m_{23}), M_{13} + M_{23} - W'_1 - m_{13}\right. \\ \qquad \left. + (m_{13} - m_{23} - M_{13} + W'_1)y(m_{13} - m_{23} - M_{13} + W'_1)\right] \end{cases} \tag{3.8b}$$

时，它才将不可约表示 $[m_{13}m_{23}0]$ 空间变到不可约表示 $[m'_{13}m'_{23}0]$ 空间去，这里

$$m'_{13} = m_{13} + W'_1 - W'_3, \quad m'_{23} = m_{23} + W'_2 - W'_3. \tag{3.9}$$

$[m'_{13}m'_{23}0]$ 的重数为(由 (1.6))

$$\begin{aligned} N = {} & M_{13} - W'_1 + 1 - (M_{23} - W'_1)y(M_{23} - W'_1 - 1) \\ & - (M_{13} - W'_1 - m_{13} + m_{23})y(M_{13} - W'_1 - m_{13} + m_{23} - 1) \\ & + (M_{23} - W'_2)[1 - y(M_{23} - W'_2)] \\ & - y(M_{23} - W'_1 - 1)(M_{13} - W'_2 - m_{23})y(M_{13} - W'_2 - m_{23}) \\ & - y(M_{13} - W'_1 - m_{13} + m_{23} - 1)(m_{13} - m_{23} - W'_2)y(m_{13} - m_{23} - W'_2) \\ & - y(W'_1 - M_{23})(W'_3 - m_{23})y(W'_3 - m_{23}) \\ & - y(W'_1 - M_{13} + m_{13} - m_{23})(W'_3 - M_{23})y(W'_3 - M_{23}) \end{aligned} \tag{3.10}$$

如果条件 (3.8) 不满足，Wigner 算符 (2.2) 便将 $[m_{13}m_{23}0]$ 空间化为零。

注意：(3.8a, b) 都是由 (1.3)、(1.4) 变换而来，是我们有意识地将它们分成了两组。(3.8a) 不是别的，正是 Wigner 算符的 δ 阵满足的条件。

这个定理清楚地告诉我们：不同等价类的 Wigner 算符对 $[m_{13}m_{23}0]$ 空间的作用是不一样的，或将它变到不同的不可约表示$[m'_{13}m'_{23}0]$空间中去，或将它化为零. 根据这个定理，如果 Wigner 算符的 δ 阵不满足(3.8)、则相应的 Wigner 系数(3.5)必定为零.

3. Wigner 算符中任一给定等价类对不同不可约表示空间的作用

现在将 Wigner 算符 (2.2) 一给定等价类 (其 δ 阵按 (2.4) 已给出) 作用于任意不可约表示 $[m_{13}m_{23}0]$ 空间上. 我们来研究一下这一给定等价类要将怎样的不可约表示 $[m_{13}m_{23}0]$ 空间化为零，或者如果结果不为零，由之产生的不可约表示 $[m'_{13}m'_{23}0]$ 空间，特别是它的重数怎样随 $[m_{13}m_{23}0]$ 的变化而变化.

我们利用 (3.10) 来研究这个问题. 这时，(3.10) 中的N就是 Wigner 算符 (2.2) 中这一给定等价类作用于任意不可约表示 $[m_{13}m_{23}0]$ 空间时产生的不可约表示 $[m'_{13}m'_{23}0]$ 的重数. 因为 M_{13}, M_{23}, W'_1, W'_2 都是给定的，可将N视为整数 m_{13}, m_{23} 的函数.

为了分析这个函数，我们将 (3.10) 重写成

$$
\begin{aligned}
N &= N_0 + N_1 + N_2, \\
N_0 &= M_{13} - M_{23} + 1 - (W'_1 - M_{23})y(W'_1 - M_{23}) - (W'_2 - M_{23})y(W'_2 - M_{23}) \\
&\quad - (W'_3 - M_{23})y(W'_3 - M_{23}), \\
N_1 &= [-M_{13} + W'_1 + (W'_3 - M_{23})y(W'_3 - M_{23}) + x_1 - (x_1 - W'_2)y(x_1 - W'_2)] \\
&\quad \times y(M_{13} - W'_1 - 1 - x_1), \\
N_2 &= -y(W'_1 - M_{23})(W'_3 - x_2)y(W'_3 - x_2) - y(M_{23} - W'_1 - 1) \\
&\quad \times (M_{13} - W'_2 - x_2)y(M_{13} - W'_2 - x_2).
\end{aligned} \tag{3.11}
$$

式中已令 $x_1 = m_{13} - m_{23}$, $x_2 = m_{23}$. N_0不包括 x_1, x_2, N_1只包括 x_1, N_2只包括 x_2.

首先来分析 N_1. 将 N_1 重写成

$$
\begin{aligned}
N_1 = {} & x_1 y(M_{13} - W'_1 - 1 - x_1)[1 - y(x_1 - W'_2)] + y(M_{13} - W'_1 - 1 - x_1)[-M_{13} \\
& + W'_1 + (W'_3 - M_{23})y(W'_3 - M_{23}) + W'_2 y(x_1 - W'_2)],
\end{aligned} \tag{3.12}
$$

令

$$
x_1^0 = M_{13} - W'_1 - (W'_3 - M_{23})y(W'_3 - M_{23}), \tag{3.13}
$$

不难证明，如果 $x_1 \geqslant x_1^0$, 则 N_1 为常数 (0)，如果 $x_1 < x_1^0$, 则 N_1 是 x_1 的线性函数:

$$
N_1 = \begin{cases} 0, & x_1 \geqslant x_1^0 \\ x_1 - M_{13} + W'_1 + (W'_3 - M_{23})y(W'_3 - M_{23}), & x_1 < x_1^0 \end{cases} \tag{3.14}
$$

事实上，当 $x_1 \geqslant x_1^0$ 时，

$$
\begin{gathered}
M_{13} - W'_1 - 1 - x_1 \leqslant M_{13} - W'_1 - 1 - x_1^0 = (W'_3 - M_{23})y(W'_3 - M_{23}) - 1, \\
x_1 - W'_2 \geqslant (W'_3 - M_{23})[1 - y(W'_3 - M_{23})].
\end{gathered}
$$

如果 $W'_3 \geqslant M_{23}$, 则 $x_1 - W'_2 \geqslant 0$, 因而 $y(x_1 - W'_2) = 1$; 如果 $W'_3 < M_{23}$, 则 $M_{13} - W'_1 - 1 - x_1 < 0$, 因而 $y(M_{13} - W'_1 - 1 - x_1) = 0$, 而 $y(x_1 - W'_2) = 1$ 和 $y(M_{13} - W'_1 - 1 - x_1) = 0$ 都会使 $N_1 = 0$.

当 $x_1 < x_1^0$ 时，由于 $x_1 - W'_2 < 0$, $y(x_1 - W'_2) = 0$; $M_{13} - W'_1 - 1 - x_1 \geqslant -1$, $y(M_{13} - W'_1 - 1 - x_1) = 1$. 很容易将 N_1 化成 (3.14) 的第二式.

再来看 N_2. 将 N_2 重写成

$$
N_2 = x_2[y(W'_1 - M_{23})y(W'_3 - x_2) + y(M_{23} - W'_1 - 1)y(M_{13} - W'_2 - x_2)]
$$

$$- y(W_1' - M_{23})W_3'y(W_3' - x_2) - y(M_{23} - W_1' - 1)(M_{13} - W_2')y(M_{13} - W_2' - x_2). \tag{3.15}$$

根据同样的方法，如果令

$$x_2^0 = M_{13} - W_2' - (W_1' - M_{23})y(W_1' - M_{23}), \tag{3.16}$$

则 N_2 当 $x_2 \geqslant x_2^0$ 时为常数 (0)，当 $x_2 < x_2^0$ 时，是 x_2 之线性函数，即

$$N_2 = \begin{cases} 0, & x_2 \geqslant x_2^0 \\ x_2 - M_{13} + W_2' + (W_1' - M_{23})y(W_1' - M_{23}). & x_2 < x_2^0 \end{cases} \tag{3.17}$$

对 N 作了上述分析后，便可以确定重数 N 在 $x_1 = m_{13} - m_{23}$，$x_2 = m_{23}$ 空间中的分布规律了．我们在 $x_1 - x_2$ 平面内，画出 $x_1 = x_1^0$，$x_2 = x_2^0$ 两条直线．这两条直线将 $x_1 - x_2$ 平面划分为四个区域．将 (3.14) 和 (3.17) 代入 (3.11)，便可求得在这四个区域中 N 的表式为

区域 (I) ($x_1 \geqslant x_1^0$, $x_2 \geqslant x_2^0$)：

$$N = M_{13} - M_{23} + 1 - (W_1' - M_{23})y(W_1' - M_{23}) - (W_2' - M_{23})y(W_2' - M_{23}) - (W_3' - M_{23})y(W_3' - M_{23}). \tag{3.18}$$

区域 (II) ($x_1 < x_1^0$, $x_2 \geqslant x_2^0$).

$$N = W_1' - M_{23} + 1 - (W_1' - M_{23})y(W_1' - M_{23}) - (W_2' - M_{23})y(W_2' - M_{23}) + x_1, \tag{3.19}$$

区域 (III) ($x_1 \geqslant x_1^0$, $x_2 < x_2^0$)：

$$N = W_2' - M_{23} + 1 - (W_2' - M_{23})y(W_2' - M_{23}) - (W_3' - M_{23})y(W_3' - M_{23}) + x_2, \tag{3.20}$$

区域 (IV) ($x_1 < x_1^0, x_2 < x_2^0$)：

$$N = -W_3' + 1 - (W_2' - M_{23})y(W_2' - M_{23}) + x_1 + x_2. \tag{3.21}$$

在区域 (I) 中，N 为常数，它恰好等于给定等价类中算符的总数目 [(2.7)]．在 (II)，(III)，(IV) 中，N 分别为 x_1，x_2 和 $x_1 + x_2$ 的线性函数．

在区域 (II) 中，随着 x_1 的逐一减小，N 也逐一减小．令 $N = 0$，可以求得重数为 0 时的 x_1 值为

$$x_1 = x_1^{小} = M_{23} - W_1' + (W_1' - M_{23})y(W_1' - M_{23}) + (W_2' - M_{23})y(W_2' - M_{23}) - 1. \tag{3.22}$$

很容易证明：$x_1^{小} \geqslant -1$.

在区域 (III) 中，N 随 x_2 的逐一减小而逐一减小．使 $N = 0$ 的 x_2 值为

$$x_2 = x_2^{小} = M_{23} - W_2' + (W_2' - M_{23})y(W_2' - M_{23}) + (W_3' - M_{23})y(W_3' - M_{23}) - 1, \tag{3.23}$$

显然，$x_2^{小} \geqslant -1$.

在 (IV) 中，N 是 $x_1 + x_2$ 的线性函数，随 $x_1 + x_2$ 的逐一减小而逐一减小．$N = 0$ 时的 $x_1 + x_2$ 值为

$$x_1 + x_2 = c = W_3' + (W_2' - M_{23})y(W_2' - M_{23}) - 1. \tag{3.24}$$

图 1 画出了重数 N 在空间 x_1—x_2 的分布规律．实线 $l = l_{N_0}$ 标志的是 $N = N_0$ 的线；在它的右上角区域中，N 也都等于 N_0．实线 $l = l_0$ 标志的是 $N = 0$ 的线；在它的左

边、下边和左下角，即画阴影的区域中，N 也为 0. 虚线 $l = l_{N_0-k}$ 标志的是 $N = N_0 - k$ 的线。

表 2 列出了唯一的八种特殊情况下的有关数值. 很容易画出与之相应的重数图.

表 2

情况			x_1^0	x_2^0	$x_1^{小}$	$x_2^{小}$	N_0
$W'_1 \geqslant M_{23}$	$W'_2 \geqslant M_{23}$	$W'_3 \geqslant M_{23}$	W'_2	W'_3	$W'_2 - M_{23} - 1$	$W'_3 - M_{23} - 1$	$M_{23} + 1$
		$W'_3 < M_{23}$	$M_{13} - W'_1$	W'_3	$W'_2 - M_{23} - 1$	-1	$W'_3 + 1$
	$W'_2 < M_{23}$	$W'_3 \geqslant M_{23}$	W'_2	W'_3	-1	$W'_3 - W'_2 - 1$	$W'_2 + 1$
		$W'_3 < M_{23}$	$M_{13} - W'_1$	W'_3	-1	$M_{23} - W'_2 - 1$	$M_{13} - W'_1 + 1$
$W'_1 < M_{23}$	$W'_2 \geqslant M_{23}$	$W'_3 \geqslant M_{23}$	W'_2	$M_{13} - W'_2$	$W'_2 - W'_1 - 1$	$W'_3 - M_{23} - 1$	$W'_1 + 1$
		$W'_3 < M_{23}$	$M_{13} - W'_1$	$M_{13} - W'_2$	$W'_2 - W'_1 - 1$	-1	$M_{13} - W'_2 + 1$
	$W'_2 < M_{23}$	$W'_3 \geqslant M_{23}$	W'_2	$M_{13} - W'_2$	$M_{23} - W'_1 - 1$	$W'_3 - W'_2 - 1$	$M_{13} - W'_3 + 1$
		$W'_3 < M_{23}$	$M_{13} - W'_1$	$M_{13} - W'_2$	$M_{23} - W'_1 - 1$	$M_{23} - W'_2 - 1$	$M_{13} - M_{23} + 1$

总结一下本段的工作，可以给出如下结论：

定理 3: 给定一个 δ 阵为 $(W'_1 W'_2 W'_3)$ 的 Wigner 算符的等价类，只有当不可约表示$[m_{13} m_{23} 0]$ 满足

$$m_{13} \geqslant c + 1, \quad m_{23} \geqslant x_2^{小} + 1, \quad m_{13} - m_{23} \geqslant x_1^{小} + 1. \tag{3.25}$$

时，该等价类作用于 $[m_{13} m_{23} 0]$ 空间，才给出非零结果，而且产生的不可约表示 $[m'_{13} m'_{23} 0]$ 空间的重数在 $(x_1^{小} \leqslant m_{13} - m_{23} \leqslant x_1^0,\ x_2^{小} \leqslant m_{23} \leqslant x_2^0)$，$(x_1^{小} \leqslant m_{13} - m_{23} \leqslant x_1^0,\ m_{23} \geqslant x_2^0)$ 和 $(m_{13} - m_{23} \geqslant x_1^0,\ x_2^{小} \leqslant m_{23} \leqslant x_2^0)$ 区域中分别是 m_{13}, $m_{13} - m_{23}$ 和 m_{23} 的线性函数，在 $(m_{13} - m_{23} \geqslant x_1^0,\ m_{23} \geqslant x_2^0)$ 区域中则为常数，即等于该等价类中算符的总数目. 如果 $[m_{13} m_{23} 0]$ 不满足条件 (3.25)，则该等价类要将其空间化为零.

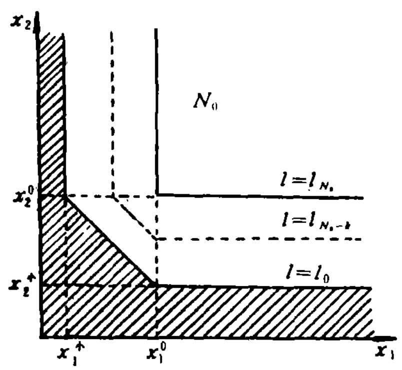

图 1

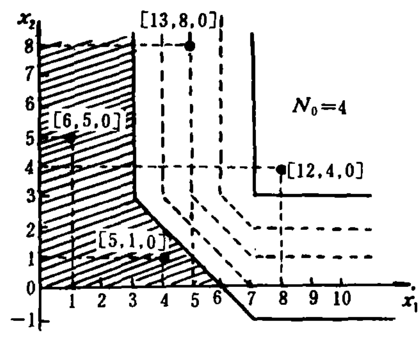

图 2

我们还要提一下，根据本段的分析，可以很容易地用图解方法判定一给定等价类 Wigner 算符对任意不可约表示空间的作用.

例: $[M_{13} M_{23} 0] = [10, 5, 0]$, $(W'_1 W'_2 W'_3) = (3, 7, 5)$. 由表 2 知, $x_1^0 = 7$, $x_2^0 = 3$,

$x_1^{\uparrow}=3$，$x_2^{\uparrow}=-1$，$N_0=4$. 这个等价类算符作用于 [5, 1, 0] 和 [6, 5, 0] 空间时，将其化为零；作用于 [13, 8, 0] 和 [12, 4, 0] 空间时，分别将其变为重数为 2 的 [11, 10, 0] 空间和重数为 4 的 [10, 6, 0] 空间.

4. Wigner 算符给定等价类中，不同算符对同一不可约表示空间的作用

现在我们要问：Wigner 算符一给定等价类中，不同算符对同一不可约表示空间的作用是否相同？

回答是：可能相同，也可能不同. 后一句话的意思是：同一等价类中的算符，可能有的使 $[m_{13}m_{23}0]$ 空间变为零，有的则不，就是说，$[m_{13}m_{23}0]$ 空间可能是同一等价类中一个或几个算符的零空间.

事实上，根据前一段的论述，如果不可约表示 $[m_{13}m_{23}0]$ 的字母满足

$$m_{13}-m_{23}\geqslant x_1^0,\quad m_{23}\geqslant x_2^0,$$

则 Wigner 算符的 δ 阵为 $(W_1'W_2'W_3')$ 的等价类作用于 $[m_{13}m_{23}0]$ 后，产生的 $[m_{13}'m_{23}'0]$ 的重数为 N_0，它恰好等于该等价类中算符的数目. 这时，该等价类中没有一个算符能够将 $[m_{13}m_{23}0]$ 空间变为零.

用 L_i 表示处于 $l=l_{N_0-i}$ 线上的空间的集合，据前段论述，又可知道，如果 $[m_{13}m_{23}0]$ 空间处在 L_1 中，那么 $[m_{13}'m_{23}'0]$ 的重数即比等价类中算符的数目少 1，就是说，这时等价类中有一个算符要将 $[m_{13}m_{23}0]$ 空间变为零，亦即 $[m_{13}m_{23}0]$ 空间是等价类中一个算符的零空间. 我们将这个算符简单地用它的算符阵来表示，记为 (Γ_1)，于是

$$\left\langle\begin{matrix}(\Gamma_1)\\ [M]\\ (M)\end{matrix}\right\rangle\left|\begin{matrix}[m]\\ (m)\end{matrix}\right\rangle=0,\quad [m]\in L_1.$$

如果 $[m_{13}m_{23}0]$ 处在 L_2 中，那么 $[m_{13}m_{23}0]$ 空间将是等价类中两个 Wigner 算符的零空间，其中一个为 (Γ_1)，另一个记为 (Γ_2)：

$$\left\langle\begin{matrix}(\Gamma_1)\\ [M]\\ (M)\end{matrix}\right\rangle\left|\begin{matrix}[m]\\ (m)\end{matrix}\right\rangle=0,\quad [m]\in L_1\cup L_2;\qquad \left\langle\begin{matrix}(\Gamma_2)\\ [M]\\ (M)\end{matrix}\right\rangle\left|\begin{matrix}[m]\\ (m)\end{matrix}\right\rangle=0,\quad [m]\in L_2.$$

余此类推，如果 $[m_{13}m_{23}0]$ 处在 $l=l_0$ 线上，则等价类的所有 Wigner 算符都将 $[m_{13}m_{23}0]$ 空间变为零，就是说，$[m_{13}m_{23}0]$ 空间是全部等价类中算符的零空间. 处在 $l=l_0$ 线以左、以下和左下角的 $[m_{13}m_{23}0]$ 空间，当然也全是等价类所有算符的零空间.

这个事实告诉我们，一等价类中的算符 (Γ_i) 同空间集合 L_i 有着一定的对应关系，即 L_i 是 (Γ_i) 的最大零空间. 显然，可以用最大零空间来表记一个 Wigner 算符.

四、研究 Wigner 算符作用的意义

研究 SU_3 群 Wigner 算符的作用，对解决有重数情形下 SU_3 群 Wigner 系数的计算问题将提供重要信息. 首先，研究 SU_3 群 Wigner 算符的作用，可以使我们判定 SU_3 群 Wigner 系数非零的条件. 例如，Wigner 系数

$$\left\langle \begin{matrix}[3,3,0]\\(m')\end{matrix} \middle| \left\langle \begin{matrix}(\Gamma)\\ [10,5,0]\\ (M)\end{matrix}\right\rangle \middle| \begin{matrix}[5,1,0]\\(m)\end{matrix}\right\rangle$$

是等于零的，这是因为在这里，$(W_1'W_2'W_3') = (3, 7, 5)$，算符的等价类要将 $[5, 1, 0]$ 空间化为零. 其次，研究 SU_3 群 Wigner 算符的作用，促使我们考虑 SU_3 群 Wigner 系数应当具有怎样的形式. 例如，用$\{[m^k]\}$表示处于图 1 $l = l_{N_0-k}$ 线上不可约表示空间的集合，即 $\{[m^k]\} = L_k$，那么，Wigner 系数

$$\left\langle \begin{matrix}[m']\\(m')\end{matrix} \middle| \left\langle \begin{matrix}(\Gamma_k)\\ [M]\\ (M)\end{matrix}\right\rangle \middle| \begin{matrix}[m]\\(m)\end{matrix}\right\rangle.$$

当 $m_{13} - m_{23} \geqslant x_1^0$ 时，应包括因子 $y(m_{23} - m_{23}^k - 1)$；当 $m_{23} \geqslant x_2^0$ 时应包括因子 $y[(m_{13} - m_{23}) - (m_{13}^k - m_{23}^k) - 1]$；当 $m_{13} - m_{23} < x_1^0$, $m_{23} < x_2^0$ 时应包括因子 $y(m_{13} - m_{13}^k - 1)$. 因为这些因子可以保证当 $[m] \in L_i (i = k, k + 1, \cdots, N_0)$ 时，上述 Wigner 系数为零. 至于这些因子在 Wigner 系数中以怎样的函数形式出现，那是有待进一步解决的问题.

参 考 文 献

[1] B. Preziosi, A. Simoni and B. Vitale, Nuovo Cimento, **34**(1964), 1101.
[2] B. Gruber, *J. Math. Phys.*, **11**(1970), 3077.
[3] L. C. Biedenharn and T. D. Louck, *J. Math. Phys.*, **13**(1972), 1985.
[4] 曾高坚,高能物理与核物理, **5** (1981), 82.
[5] J. D. Louck, *Ame. J. Phys.*, **38**(1970), 3.
[6] J. P. Draayer and Yoshimi Akiyama, *J. Math. Phys.*, **14**(1973), 1904.

THE ACTION OF WIGNER OPERATOR OF SU_3 GROUP

ZENG GAO-JIAN

(*Hunan Teacher's College*)

ABSTRACT

Appling the formula on C-G series of SU_3 group which was derived by the author, the action of Wigner operator of SU_3 group is systematically discussed, the distribution rule of occupation number in C-G series of SU_3 group is analysed, and the null space of Wigner operator of SU_3 group is determined.