第5卷 第2期 高能物理与核物理 Vol. 5, No. 2
1981年3月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS March, 1981

有延展外源的 $SU(3)$ 规范场经典静态球对称解

马中骐 东方晓 周咸建 薛丕友
(中国科学院高能物理研究所)

摘 要

本文证明了，在可对角化的静态延展外源下，经典 $SU(3)$ Yang-Mills 方程的广义静态球对称解必须要求外源是球对称的，而在此外源下，不存在非库仑解的广义静态球对称解.

一、

阿贝尔和非阿贝尔的规范场存在着质的差别. 由于非阿贝尔规范场 Yang-Mills 方程是非线性的，故会存在若干不同于阿贝尔情形的特殊形式的解. 人们尤其希望寻找有外源情况下的这种特殊形式的解，讨论它们的物理意义，并期望从经典解的讨论中找到层子禁闭的某种启示.

Mandula[1] 找到了无质量标量电动力学的静态球对称解，它的能量低于相应的库仑解，并使外源完全屏蔽. 但是，Magg[2] 证明了在静态球对称非均匀延展外源下，$SU(2)$ Yang-Mills 规范场静态球对称解只有库仑解. 这就给寻找有外源的 Yang-Mills 方程经典解提供一个有力的限制.

从物理观点看，$SU(3)$ 规范场的讨论更令人感兴趣. 尽管 $SU(2)$ 已经是非阿贝尔的，但 $SU(3)$ 规范势分量增多，它的非 Cartan 子代数的分量（除 3、8 以外的分量）在 Yang-Mills 方程和有关关系中互相交叉，Magg 的论证向 $SU(3)$ 推广存在新的困难. 此外，Magg 的证明实际上隐含有外源梯度处处不为零的假定，我们认为这个条件是不必要的. 本文在对有静态延展外源的 $SU(3)$ 经典静态解普遍讨论[3]的基础上，根据广义球对称解的定义，选择合适的规范不变量，找出对规范势的一系列独立限制，结合 Yang-Mills 方程，证明了对于可对角化的静态延展外源，静态球对称解必须有球对称外源，在此外源下，不存在非库仑解的广义静态球对称解. 当然，外源在全空间是非零常数的情况，物理上不感兴趣，我们没有讨论.

在第二节，引入在证明过程中反复用到的几个引理，并根据广义球对称解的定义，讨论广义静态球对称规范势的一般限制. 第三节利用这些关系严格论证在可对角化的静态

本文 1979 年 11 月 14 收到.

球对称延展外源下，广义静态球对称解只能是库仑解.

二、

若可选择适当的惯性系，使流的空间分量为零，则称为静态外源. 由 Yang-Mills 方程

$$D_\nu F_{\nu\mu} \equiv \partial_\nu F_{\nu\mu} + g[A_\nu, F_{\nu\mu}] = -J_\mu \tag{1}$$

知外源 J_μ 的四维协变散度为零，在 $A_4 = 0$ 的规范下，J_4 与时间无关. J_4 是厄米矩阵，可通过与时间无关的么正相似变换对角化. 我们限于讨论此相似变换在全空间连续可微的情况，并选它作为规范变换，于是外源可表为[3,4]

$$\boldsymbol{J} = 0, \quad J_4 = \frac{1}{2}[\lambda_3 q_3(\boldsymbol{r}) + \lambda_8 q_8(\boldsymbol{r})], \tag{2}$$

λ_a, $a = 1, 2, \cdots, 8$ 是 Gell-Mann 矩阵. 定义延展外源为

$$q_3 \neq 0, \quad q_3^2 \neq 3q_8^2, \tag{3}$$

它保证 J_4 本征值互不相等. 在此外源下，文献 [3] 指出，可以选择保持 (2) 式的规范，使 $SU(3)$ 规范势广义静态解化为

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{A}^a(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{A}^a(\boldsymbol{r}), && a = 1, 2, \cdots, 8 \\ &A_4^{3,8}(\boldsymbol{r}, t) = A_4^{3,8}(\boldsymbol{r}), \quad A_4^b(\boldsymbol{r}, t) = 0, && b \neq 3, 8 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

即广义静态解一定是狭义静态解.

如果由方程解 A_μ 组成的所有规范不变标量场都是空间转动不变的，则称为广义球对称解. 本文讨论的方程解 A_μ 及其由它组成的标量场、矢量场都假定是连续可微的. 为了讨论广义静态球对称解的性质，先引入几个以后反复应用的引理，证明方法主要是反复运用引理 1.

引理 1　在球面上的连续切矢量场必有零点[5].

设 S 表矢径长度 r 的一切连续函数的集合，转动不变的标量场记作 $\phi(\boldsymbol{r}) = \phi(r) \in S$，转动不变的矢量场，由引理 1，一定沿径向，因此可记为 $\boldsymbol{R}(r) \in S\hat{\boldsymbol{r}}$. $\hat{\boldsymbol{r}}$ 是矢径方向单位矢量.

引理 2　若 $\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B} \in S\hat{\boldsymbol{r}}$，则 $\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B} = 0$.

引理 3　若 $\boldsymbol{A} \wedge (\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B}) \in S\hat{\boldsymbol{r}}$，则 $\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B} = 0$.

引理 4　若 $(\boldsymbol{A})^2 \in S$，$\boldsymbol{A} \wedge (\nabla \wedge \boldsymbol{A}) \in S\hat{\boldsymbol{r}}$，$\boldsymbol{A} \cdot (\nabla \wedge \boldsymbol{A}) \in S$，则 $\nabla \wedge \boldsymbol{A} = \lambda(r)\boldsymbol{A}$.

引理 5　若 $\nabla\phi \in S\hat{\boldsymbol{r}}$，则 $\phi \in S$；若 $\nabla \wedge \boldsymbol{R} \in S\hat{\boldsymbol{r}}$，$\boldsymbol{R} \wedge \boldsymbol{r} = 0$，则 $\nabla \wedge \boldsymbol{R} = 0$ 且 $\boldsymbol{R} \in S\hat{\boldsymbol{r}}$.

令

$$(J_4)^n = \frac{1}{2^n}[a_n + \lambda_3 b_n + \lambda_8 c_n] \tag{5}$$

不难计算

$$\begin{gathered} a_0 = 1, \quad b_0 = c_0 = a_1 = 0, \quad b_1 = q_3, \quad c_1 = q_8, \\ a_2 = \frac{2}{3}(q_3^2 + q_8^2), \qquad b_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} q_3 q_8, \end{gathered} \tag{6}$$

$$c_2=\frac{1}{\sqrt{3}}(q_3^2-q_8^2),\qquad a_3=\frac{2}{3\sqrt{3}}q_8(3q_3^2-q_8^2),$$

$$\cdots\cdots.$$

由 Yang-Mills 方程 (1)，J_4 等于由方程解 A_μ 组成的量，因此根据广义静态球对称解的定义，由 A_μ 和 J_4 组成的一切规范不变标量场也是转动不变的. 例如

$$\mathrm{Tr}[J_4^n]=\frac{3}{2^n}a_n\in S,$$

因此

$$\frac{3}{2}a_2=q_3^2+q_8^2\in S,$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{2}a_3=q_8(3q_3^2-q_8^2)=q_8[3(q_3^2+q_8^2)-4q_8^2]\in S.$$

两式联立，得

$$q_8\in S,\quad q_3\in S. \tag{7}$$

因此，静态延展外源下，广义静态球对称解必须要求外源是球对称的，非球对称外源不可能有广义静态球对称解. 下面都是在静态球对称延展外源条件下进行讨论.

引理 6 若 $a_n\phi_1+b_n\phi_2+c_n\phi_3\in S$ 或 $a_n\boldsymbol{R}_1+b_n\boldsymbol{R}_2+c_n\boldsymbol{R}_3\in S\hat{\boldsymbol{r}}$ 对一切自然数 n 成立，其中 ϕ_i 是标量场，$\boldsymbol{R}_i$ 是矢量场，则分别有

$$\phi_i\in S\quad 或\quad \boldsymbol{R}_i\in S\hat{\boldsymbol{r}},\quad (i=1,2,3)$$

证明：延展外源条件 (3) 刚好保证系数行列式

$$\begin{vmatrix} a_0, & b_0, & c_0\\ a_1, & b_1, & c_1\\ a_2, & b_2, & c_2\end{vmatrix}\neq 0, \tag{8}$$

因此 ϕ_i 或 $\boldsymbol{R}_i$ 满足的线性联立方程有解[1)]，注意 (7) 式，ϕ_i 或 $\boldsymbol{R}_i$ 都可用转动不变的量表出.

引理 7 如果存在由 A_μ 组成的、规范不变的标量场 $\phi\in S$，在所讨论的半径为 r 的球面附近满足 $\nabla\phi\neq 0$，则在此球面附近，由方程解 A_μ（和 J_4）组成的一切规范不变矢量场 $\boldsymbol{R}$ 是转动不变的：

$$\boldsymbol{R}\in S\hat{\boldsymbol{r}}.$$

证明：矢量场 $\boldsymbol{R}\wedge\nabla\phi$ 的长 $(\boldsymbol{R}\wedge\nabla\phi)^2$ 是由 A_μ 组成的规范不变的标量场、因此转动不变，但 $\nabla\phi$ 是沿径向的非零矢量，故 $\boldsymbol{R}\wedge\nabla\phi$ 沿切向，在球面上必有零点，于是 $(\boldsymbol{R}\wedge\nabla\phi)^2$ 在球面上处处为零，即 $\boldsymbol{R}\wedge\nabla\phi=0$，$\boldsymbol{R}$ 沿径向. 又因 $\boldsymbol{R}$ 的长是由 A_μ 组成的规范不变的标量场，故 $\boldsymbol{R}\in S\hat{\boldsymbol{r}}$.

设在 $R_1\leqslant r\leqslant R_2$ 的球壳内（R_1 可为零，R_2 可为无穷大）外源不均匀，∇q_3 和 ∇q_8 不同时为零，显然存在某正整数 n，使 $2^n\,\mathrm{Tr}[J_4^n]=a_n$ 的梯度场 ∇a_n 不为零，于是引理 7 成立. 我们先就外源不均匀情况讨论.

用 $Q=-\frac{i}{2}Q^a\lambda_a$ 或 $\boldsymbol{Q}=-\frac{i}{2}\boldsymbol{Q}^a\lambda_a$ 代表由方程解 A_μ 和 J_4 组成的任意按 $SU(3)$ 正

1) 显然，当 $n\geqslant 3$，不会产生新的独立条件了.

则表示变换的标量场或矢量场，取规范不变量 $\mathrm{Tr}\,[J_4^n Q]\in S$ 和 $\mathrm{Tr}\,[J_4^n \boldsymbol{Q}]\in S\hat{\boldsymbol{r}}$，得

$$Q^{3,8}\in S,\quad \boldsymbol{Q}^{3,8}\in S\hat{\boldsymbol{r}},\tag{9}$$

再取 $\mathrm{Tr}\,[J_4^m Q\boldsymbol{D}J_4^n]\in S\hat{\boldsymbol{r}}$，其中 $\boldsymbol{D}$ 是三维协变微商算符

$$\boldsymbol{D}J_4^n=\boldsymbol{\nabla}J_4^n+g[\boldsymbol{A},\,J_4^n].\tag{10}$$

应用 (7) 和 (9) 式，去掉一些转动不变的项和因子，再按引理 6 让 $a_m b_n$，$a_m c_n$ 等项分别转动不变，联立得

$$Q^a\boldsymbol{A}^b-Q^b\boldsymbol{A}^a\in S\hat{\boldsymbol{r}},\tag{11a}$$

$$Q^a\boldsymbol{A}^a+Q^b\boldsymbol{A}^b\in S\hat{\boldsymbol{r}}.\tag{11b}$$

其中 $(a,\,b)$ 取 $(1,\,2)$、$(4,\,5)$ 或 $(6,\,7)$．同理由 $\mathrm{Tr}\,[J_4^m\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{D}J_4^n]\in S$ 和 $\mathrm{Tr}\,[J_4^m\boldsymbol{Q}\wedge\boldsymbol{D}J_4^n]\in S\hat{\boldsymbol{r}}$，得

$$\boldsymbol{Q}^a\cdot\boldsymbol{A}^b-\boldsymbol{Q}^b\cdot\boldsymbol{A}^a\in S,\tag{12a}$$

$$\boldsymbol{Q}^a\cdot\boldsymbol{A}^a+\boldsymbol{Q}^b\cdot\boldsymbol{A}^b\in S,\tag{12b}$$

$$\boldsymbol{Q}^a\wedge\boldsymbol{A}^b-\boldsymbol{Q}^b\wedge\boldsymbol{A}^a\in S\hat{\boldsymbol{r}},\tag{13a}$$

$$\boldsymbol{Q}^a\wedge\boldsymbol{A}^a-\boldsymbol{Q}^b\wedge\boldsymbol{A}^b\in S\hat{\boldsymbol{r}},\tag{13b}$$

$(a,\,b)$ 取值同上．

三、

现在，我们选择若干由 Yang-Mills 方程解 A_μ 和外源 J_4 组成的、按 $SU(3)$ 正则表示变换的标量或矢量场来取代 (9)、(11)—(13) 式中的 Q 或 $\boldsymbol{Q}$，以得到广义静态球对称条件对规范势 A_μ 的各种限制，再利用 Yang-Mills 方程，可证明广义静态球对称解一定是狭义静态球对称解，即存在规范，使方程解取

$$\left.\begin{array}{ll}\boldsymbol{A}^a=0,\,(a=1,\,2,\,\cdots,\,8) & A_4^b=0,\,(b\neq 3,\,8).\\ A_4^{3,8}\in S,\quad \nabla^2 A_4^{3,8}(r)=-iq_{3,8} & \end{array}\right\}\tag{14}$$

这相当又回到阿贝尔情形，解是库仑解．

我们先就外源不均匀的情况来证明．但是下面的一般讨论，对外源均匀的情况，只要引理 7 的前提成立，也都是可用的．

(i) 令 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{G}_n\equiv\boldsymbol{D}J_4^n$，代入 (12a) 和 (13b) 得

$$(\boldsymbol{A}^a)^2+(\boldsymbol{A}^b)^2\in S,\tag{15}$$

$$\boldsymbol{A}^a\wedge\boldsymbol{A}^b=0.\tag{16}$$

$(a,\,b)$ 取 $(1,\,2)$、$(4,\,5)$ 或 $(6,\,7)$．作规范变换

$$U=\exp\left\{-\frac{i}{2}\lambda_3 y_1(\boldsymbol{r})-\frac{i}{2}\lambda_8 y_2(\boldsymbol{r})\right\},\tag{17}$$

$$A_\mu\to UA_\mu U^{-1}+\frac{i}{2g}[\partial_\mu y_1(\boldsymbol{r})]\lambda_3+\frac{i}{2g}[\partial_\mu y_2(\boldsymbol{r})]\lambda_8.\tag{18}$$

这规范变换保持 (2)—(4) 式仍成立，且

$$A_4^a\to A_4^a,\quad a=1,\,2\cdots,8\tag{19a}$$

$$\boldsymbol{A}^3 \to \boldsymbol{A}^3 - \frac{1}{g}\nabla y_1(\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{A}^8 \to \boldsymbol{A}^8 - \frac{1}{g}\nabla y_2(\boldsymbol{r}) \tag{19b}$$

$$\boldsymbol{A}^a \to (\cos Y_{ab})\boldsymbol{A}^a - (\sin Y_{ab})\boldsymbol{A}^b, \quad \boldsymbol{A}^b \to (\sin Y_{ab})\boldsymbol{A}^a + (\cos Y_{ab})\boldsymbol{A}^b, \tag{19c}$$

(a, b) 取 $(1, 2)$、$(4, 5)$ 或 $(6, 7)$,

$$Y_{12} = y_1, \quad Y_{45} = \frac{1}{2}(y_1 + \sqrt{3}\,y_2), \quad Y_{67} = \frac{1}{2}(-y_1 + \sqrt{3}\,y_2) \tag{19d}$$

因为 (16) 式, (19c) 实际是代数关系，选择 y_1, y_2 可使三组 (a, b) 中有两组各有一个矢量为零,例如使

$$\boldsymbol{A}^5 = \boldsymbol{A}^7 = 0, \tag{20}$$

再由 (15) 式,令

$$\boldsymbol{A}^1 = \cos\alpha(\boldsymbol{r})\boldsymbol{A}_{12}, \quad \boldsymbol{A}^2 = \sin\alpha(\boldsymbol{r})\boldsymbol{A}_{12} \tag{21}$$

得

$$(\boldsymbol{A}_{12})^2 \in S, \ (\boldsymbol{A}^4)^2 \in S, \ (\boldsymbol{A}^6)^2 \in S. \tag{22}$$

(ii) 规范场强 $F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + gf^{abc}A^b_\mu A^c_\nu$,

令

$$(\boldsymbol{F}_4)_i = F_{4j}, \quad (\boldsymbol{F})_i \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F_{jk}, \tag{23}$$

分别让 $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{F}_4$ 和 $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{F}$ 代入 (9) 式,得

$$A^3_4 \in S, \quad A^8_4 \in S \tag{24}$$

和

$$\nabla \wedge \boldsymbol{A}^3 \in S\hat{\boldsymbol{r}}, \quad \nabla \wedge \boldsymbol{A}^8 \in S\hat{\boldsymbol{r}}. \tag{25}$$

(iii) 令

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{B}_{nm} \equiv \boldsymbol{D}J^n_4 \wedge \boldsymbol{D}J^m_4 + \boldsymbol{D}J^m_4 \wedge \boldsymbol{D}J^n_4, \tag{26}$$

代入 (12) 式得

$$\boldsymbol{A}^1 \cdot (\boldsymbol{A}^4 \wedge \boldsymbol{A}^6) \in S, \quad \boldsymbol{A}^2 \cdot (\boldsymbol{A}^4 \wedge \boldsymbol{A}^6) \in S. \tag{27}$$

代入 (13a) 式得

$$\boldsymbol{A}^1(\boldsymbol{A}^4 \cdot \boldsymbol{A}^6) = \boldsymbol{A}^4(\boldsymbol{A}^6 \cdot \boldsymbol{A}^1) = \boldsymbol{A}^6(\boldsymbol{A}^1 \cdot \boldsymbol{A}^4). \tag{28}$$

代入 (13b) 式得

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{A}_{12} \wedge [\boldsymbol{A}_{12} \wedge (b_n \nabla b_m + b_m \nabla b_n)] - \frac{g}{8}[(b_n + \sqrt{3}\,c_n)(-b_m + \sqrt{3}\,c_m) \\
&\qquad + (-b_n + \sqrt{3}\,c_n)(b_m + \sqrt{3}\,c_m)]\,\boldsymbol{A}^2 \wedge (\boldsymbol{A}^4 \wedge \boldsymbol{A}^6) \in S\hat{\boldsymbol{r}} \\
&\boldsymbol{A}^4 \wedge \{\boldsymbol{A}^4 \wedge [(b_n + \sqrt{3}\,c_n)(\nabla b_m + \sqrt{3}\,\nabla c_m) + (b_m + \sqrt{3}\,c_m)(\nabla b_n \\
&\qquad + \sqrt{3}\,\nabla c_n)]\} + g[b_n(-b_m + \sqrt{3}\,c_m) + (-b_n + \sqrt{3}\,c_n)b_m] \\
&\qquad \times \boldsymbol{A}^4 \wedge (\boldsymbol{A}^6 \wedge \boldsymbol{A}^2) \in S\hat{\boldsymbol{r}} \qquad\qquad (29) \\
&\boldsymbol{A}^6 \wedge \{\boldsymbol{A}^6 \wedge [(-b_n + \sqrt{3}\,c_n)(-\nabla b_m + \sqrt{3}\,\nabla c_m) + (-b_m + \sqrt{3}\,c_m) \\
&\qquad \times (-\nabla b_n + \sqrt{3}\,\nabla c_n)]\} - g[b_n(b_m + \sqrt{3}\,c_m) + (b_n \\
&\qquad + \sqrt{3}\,c_n)b_m]\,\boldsymbol{A}^6 \wedge (\boldsymbol{A}^2 \wedge \boldsymbol{A}^4) \in S\hat{\boldsymbol{r}}.
\end{aligned}$$

(iv) 令

$$Q = T_n \equiv F_4 \wedge DJ_4^n + DJ_4^n \wedge F_4, \tag{30}$$

代入 (13b) 式，得

$$\begin{aligned} & A_4^3 \boldsymbol{A}_{12} \wedge (\boldsymbol{A}_{12} \wedge \nabla b_n) + b_n \boldsymbol{A}_{12} \wedge (\boldsymbol{A}_{12} \wedge \nabla A_4^3) - \frac{g}{4}(-b_n A_4^3 + 3c_n A_4^8) \\ & \qquad \times \boldsymbol{A}^2 \wedge (\boldsymbol{A}^4 \wedge \boldsymbol{A}^6) \in S\hat{\boldsymbol{r}} \\ & (A_4^3 + \sqrt{3} A_4^8) \boldsymbol{A}^4 \wedge [\boldsymbol{A}^4 \wedge (\nabla b_n + \sqrt{3} \nabla c_n)] + (b_n + \sqrt{3} c_n) \\ & \qquad \times \boldsymbol{A}^4 \wedge [\boldsymbol{A}^4 \wedge (\nabla A_4^3 + \sqrt{3} \nabla A_4^8)] + g[b_n(-2A_4^3 + \sqrt{3} A_4^8) \\ & \qquad + \sqrt{3} c_n A_4^3] \boldsymbol{A}^4 \wedge (\boldsymbol{A}^6 \wedge \boldsymbol{A}^2) \in S\hat{\boldsymbol{r}} \\ & (-A_4^3 + \sqrt{3} A_4^8) \boldsymbol{A}^6 \wedge [\boldsymbol{A}^6 \wedge (-\nabla b_n + \sqrt{3} \nabla c_n)] + (-b_n + \sqrt{3} c_n) \\ & \qquad \times \boldsymbol{A}^6 \wedge [\boldsymbol{A}^6 \wedge (-\nabla A_4^3 + \sqrt{3} \nabla A_4^8)] - g[b_n(2A_4^3 + \sqrt{3} A_4^8) \\ & \qquad + \sqrt{3} c_n A_4^3] \boldsymbol{A}^6 \wedge (\boldsymbol{A}^2 \wedge \boldsymbol{A}^4) \in S\hat{\boldsymbol{r}}. \end{aligned} \tag{31}$$

将 (29) 和 (31) 式联立，消去 ∇b_n 和 ∇c_n 等，应用引理 2、3、6，再注意 Yang-Mills 方程在 $\mu = 4$ 和 $a = 3, 8$ 时(见 (38a, b) 式)，延展外源条件 (3) 式要求 A_4^3 和 A_4^8 不能同时为零，得

$$\boldsymbol{A}^2(\boldsymbol{A}^4 \cdot \boldsymbol{A}^6) = \boldsymbol{A}^4(\boldsymbol{A}^6 \cdot \boldsymbol{A}^2) = \boldsymbol{A}^6(\boldsymbol{A}^2 \cdot \boldsymbol{A}^4). \tag{32}$$

与 (28) 式合起来有

$$\boldsymbol{A}_{12}(\boldsymbol{A}^4 \cdot \boldsymbol{A}^6) = \boldsymbol{A}^4(\boldsymbol{A}^6 \cdot \boldsymbol{A}_{12}) = \boldsymbol{A}^6(\boldsymbol{A}_{12} \cdot \boldsymbol{A}^4), \tag{33}$$

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{A}_{12} \wedge \nabla A_4^3 = 0, \quad \boldsymbol{A}^4 \wedge (\nabla A_4^3 + \sqrt{3} \nabla A_4^8) = 0, \\ & \boldsymbol{A}^6 \wedge (-\nabla A_4^3 + \sqrt{3} \nabla A_4^8) = 0. \end{aligned} \tag{34}$$

$$\left.\begin{aligned} & \boldsymbol{A}_{12} \wedge [b_n \nabla b_m + b_m \nabla b_n] = 0, \\ & \boldsymbol{A}^4 \wedge [(b_n + \sqrt{3} c_n)(\nabla b_m + \sqrt{3} \nabla c_m) + (b_m + \sqrt{3} c_m) \\ & \qquad \times (\nabla b_n + \sqrt{3} \nabla c_n)] = 0, \\ & \boldsymbol{A}^6 \wedge [(-b_n + \sqrt{3} c_n)(-\nabla b_m + \sqrt{3} \nabla c_m) \\ & \qquad + (-b_m + \sqrt{3} c_m)(-\nabla b_n + \sqrt{3} \nabla c_n)] = 0. \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

(v) 令 $Q = F$ 代入 (12) 和 (13) 式，合并后得

$$\nabla \wedge \boldsymbol{A}_{12} = \lambda_1(r) \boldsymbol{A}_{12}, \quad \nabla \wedge \boldsymbol{A}^4 = \lambda_4(r) \boldsymbol{A}^4, \quad \nabla \wedge \boldsymbol{A}^6 = \lambda_6(r) \boldsymbol{A}^6, \tag{36}$$

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{A}_{12} \wedge (\nabla \alpha + g \boldsymbol{A}^3) = 0, \quad \boldsymbol{A}^4 \wedge (\boldsymbol{A}^3 + \sqrt{3} \boldsymbol{A}^8) = 0, \\ & \boldsymbol{A}^6 \wedge (-\boldsymbol{A}^3 + \sqrt{3} \boldsymbol{A}^8) = 0. \end{aligned} \tag{37}$$

最后，写出 Yang-Mills 方程的分量形式

$$\mu = 4, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{F}_4^a + g f^{abc} \boldsymbol{A}^b \cdot \boldsymbol{F}_4^c = J_4^a,$$

$$\begin{aligned} & -\nabla^2 A_4^3 + g^2 A_4^3 (\boldsymbol{A}_{12})^2 + \frac{g^2}{4}(A_4^3 + \sqrt{3} A_4^8)(\boldsymbol{A}^4)^2 - \frac{g^2}{4}(-A_4^3 + \sqrt{3} A_4^8) \\ & \qquad \times (\boldsymbol{A}^6)^2 = i q_3. \end{aligned} \tag{38a}$$

$$\begin{aligned} & -\nabla^2 A_4^8 + \frac{\sqrt{3}}{4} g^2 (A_4^3 + \sqrt{3} A_4^8)(\boldsymbol{A}^4)^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} g^2 (-A_4^3 + \sqrt{3} A_4^8) \\ & \qquad \times (\boldsymbol{A}^6)^2 = i q_8, \end{aligned} \tag{38b}$$

$$A_4^3\nabla\cdot\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}^2\cdot\nabla A_4^3+gA_4^3\boldsymbol{A}^1\cdot\boldsymbol{A}^3-\frac{\sqrt{3}}{2}gA_4^8\boldsymbol{A}^4\cdot\boldsymbol{A}^6=0, \tag{38c}$$

$$A_4^3\nabla\cdot\boldsymbol{A}^1+2\boldsymbol{A}^1\cdot\nabla A_4^3-gA_4^3\boldsymbol{A}^2\cdot\boldsymbol{A}^3=0, \tag{38d}$$

$$\sqrt{3}(-\sqrt{3}A_4^3+A_4^8)\boldsymbol{A}^6\cdot\boldsymbol{A}^1+(A_4^3+\sqrt{3}A_4^8)(\boldsymbol{A}^3+\sqrt{3}\boldsymbol{A}^8)\cdot\boldsymbol{A}^4=0, \tag{38e}$$

$$(A_4^3+\sqrt{3}A_4^8)\nabla\cdot\boldsymbol{A}^4+2\boldsymbol{A}^4\cdot(\nabla A_4^3+\sqrt{3}\nabla A_4^8)$$
$$-\frac{\sqrt{3}}{2}g(-\sqrt{3}A_4^3+A_4^8)\boldsymbol{A}^2\cdot\boldsymbol{A}^6=0, \tag{38f}$$

$$\sqrt{3}(\sqrt{3}A_4^3+A_4^8)\boldsymbol{A}^1\cdot\boldsymbol{A}^4+(-A_4^3+\sqrt{3}A_4^8)(-\boldsymbol{A}^3+\sqrt{3}\boldsymbol{A}^8)$$
$$\cdot\boldsymbol{A}^6=0, \tag{38g}$$

$$(-A_4^3+\sqrt{3}A_4^8)\nabla\cdot\boldsymbol{A}^6+2\boldsymbol{A}^6\cdot(-\nabla A_4^3+\sqrt{3}\nabla A_4^8)$$
$$+\frac{\sqrt{3}}{2}g(\sqrt{3}A_4^3+A_4^8)\boldsymbol{A}^2\cdot\boldsymbol{A}^4=0. \tag{38h}$$

$\mu=1,2,3,\quad \nabla\wedge\boldsymbol{F}+gf^{abc}\boldsymbol{A}^b\wedge\boldsymbol{F}^c=gf^{a3c}A_4^3\boldsymbol{F}_4^c+gf^{a8c}A_4^8\boldsymbol{F}_4^c$

$$\nabla\wedge(\nabla\wedge\boldsymbol{A}^1)+g\nabla\wedge(\boldsymbol{A}^2\wedge\boldsymbol{A}^3)+g\boldsymbol{A}^2\wedge(\nabla\wedge\boldsymbol{A}^3)-g\boldsymbol{A}^3\wedge(\nabla\wedge\boldsymbol{A}^2)$$
$$+g^2\boldsymbol{A}^3\wedge(\boldsymbol{A}^1\wedge\boldsymbol{A}^3)-\frac{g^2}{2}\boldsymbol{A}^3\wedge(\boldsymbol{A}^4\wedge\boldsymbol{A}^6)+\frac{g^2}{4}\boldsymbol{A}^4\wedge(\boldsymbol{A}^1\wedge\boldsymbol{A}^4)$$
$$+\frac{g^2}{4}\boldsymbol{A}^6\wedge(\boldsymbol{A}^1\wedge\boldsymbol{A}^6)=-g^2(A_4^3)^2\boldsymbol{A}^1, \tag{39a}$$

$$\nabla\wedge(\nabla\wedge\boldsymbol{A}^2)-g\nabla\wedge(\boldsymbol{A}^1\wedge\boldsymbol{A}^3)+\frac{g}{2}\nabla\wedge(\boldsymbol{A}^4\wedge\boldsymbol{A}^6)+g\boldsymbol{A}^3\wedge(\nabla\wedge\boldsymbol{A}^1)$$
$$-g\boldsymbol{A}^1\wedge(\nabla\wedge\boldsymbol{A}^3)+\frac{g}{2}(\lambda_4+\lambda_6)\boldsymbol{A}^4\wedge\boldsymbol{A}^6+g^2\boldsymbol{A}^3\wedge(\boldsymbol{A}^2\wedge\boldsymbol{A}^3)$$
$$+\frac{g^2}{4}\boldsymbol{A}^4\wedge(\boldsymbol{A}^2\wedge\boldsymbol{A}^4)+\frac{g^2}{4}\boldsymbol{A}^6\wedge(\boldsymbol{A}^2\wedge\boldsymbol{A}^6)=-g^2(A_4^3)^2\boldsymbol{A}^2, \tag{39b}$$

$$\nabla\wedge(\nabla\wedge\boldsymbol{A}^4)-\frac{g}{2}\nabla\wedge(\boldsymbol{A}^2\wedge\boldsymbol{A}^6)+\frac{g}{2}\boldsymbol{A}^6\wedge(\nabla\wedge\boldsymbol{A}^2)-\frac{g}{2}\lambda_6\boldsymbol{A}^2\wedge\boldsymbol{A}^6$$
$$-\frac{g^2}{4}\boldsymbol{A}_{12}\wedge(\boldsymbol{A}_{12}\wedge\boldsymbol{A}^4)+\frac{g^2}{4}\boldsymbol{A}^6\wedge(\boldsymbol{A}^4\wedge\boldsymbol{A}^6)-\frac{g^2}{2}\boldsymbol{A}^6\wedge(\boldsymbol{A}^1\wedge\boldsymbol{A}^3)$$
$$-\frac{g^2}{4}(\boldsymbol{A}^3+\sqrt{3}\boldsymbol{A}^8)\wedge(\boldsymbol{A}^1\wedge\boldsymbol{A}^6)=-\frac{g^2}{4}(A_4^3+\sqrt{3}A_4^8)^2\boldsymbol{A}^4, \tag{39c}$$

$$\nabla\wedge(\boldsymbol{A}^1\wedge\boldsymbol{A}^6)+\lambda_6\boldsymbol{A}^1\wedge\boldsymbol{A}^6-\boldsymbol{A}^6\wedge(\nabla\wedge\boldsymbol{A}^1)-g\boldsymbol{A}^6\wedge(\boldsymbol{A}^2\wedge\boldsymbol{A}^3)$$
$$-\frac{g}{2}(\boldsymbol{A}^3+\sqrt{3}\boldsymbol{A}^8)\wedge(\boldsymbol{A}^2\wedge\boldsymbol{A}^6)=0, \tag{39d}$$

$$\nabla\wedge(\nabla\wedge\boldsymbol{A}^6)+\frac{g}{2}\nabla\wedge(\boldsymbol{A}^2\wedge\boldsymbol{A}^4)-\frac{g}{2}\boldsymbol{A}^4\wedge(\nabla\wedge\boldsymbol{A}^2)+\frac{g}{2}\lambda_4\boldsymbol{A}^2\wedge\boldsymbol{A}^4$$
$$-\frac{g^2}{4}\boldsymbol{A}_{12}\wedge(\boldsymbol{A}_{12}\wedge\boldsymbol{A}^6)-\frac{g^2}{4}\boldsymbol{A}^4\wedge(\boldsymbol{A}^4\wedge\boldsymbol{A}^6)+\frac{g^2}{2}\boldsymbol{A}^4\wedge(\boldsymbol{A}^1\wedge\boldsymbol{A}^3)$$
$$-\frac{g^2}{4}(-\boldsymbol{A}^3+\sqrt{3}\boldsymbol{A}^8)\wedge(\boldsymbol{A}^1\wedge\boldsymbol{A}^4)=-\frac{g^2}{4}(-A_4^3+\sqrt{3}A_4^8)^2\boldsymbol{A}^6, \tag{39e}$$

$$\nabla\wedge(\boldsymbol{A}^1\wedge\boldsymbol{A}^4)+\lambda_4\boldsymbol{A}^1\wedge\boldsymbol{A}^4-\boldsymbol{A}^4\wedge(\nabla\wedge\boldsymbol{A}^1)-g\boldsymbol{A}^4\wedge(\boldsymbol{A}^2\wedge\boldsymbol{A}^3)$$
$$+\frac{g}{2}(-\boldsymbol{A}^3+\sqrt{3}\boldsymbol{A}^8)\wedge(\boldsymbol{A}^2\wedge\boldsymbol{A}^4)=0. \tag{39f}$$

从 (38a, b) 式看到，A_4^3 和 A_4^8 不能同时为零，否则 $q_3=q_8=0$，与延展外源条件 (3) 矛盾.

因为外源不均匀，∇q_3 和 ∇q_8 不同时为零，容易证明，可适当选择 n 和 m，使 (35) 式方括号不为零，所以由 (7) 和 (22) 式知，$\boldsymbol{A}_{12}$，$\boldsymbol{A}^4$ 和 $\boldsymbol{A}^6$ 均转动不变. 注意 (6) 式，若 $\nabla q_3\neq 0$，取 $n=m=1$，$b_1\nabla b_1=q_3\nabla q_3\neq 0$；若 $\nabla q_3=0$，$q_8\neq 0$，取 $n=m=2$，$b_2\nabla b_2=\frac{4}{3}q_3^2q_8\nabla q_8\neq 0$；若 $\nabla q_3=0$，$q_8=0$，取 $n=1$，$m=2$，$b_1\nabla b_2+b_2\nabla b_1=\frac{2}{\sqrt{3}}q_3^2\nabla q_8\neq 0$，因此 $\boldsymbol{A}_{12}\in S\hat{\boldsymbol{r}}$. 同理，若 $\nabla(q_3+\sqrt{3}q_8)\neq 0$，取 $n=m=1$；若 $\nabla(q_3+\sqrt{3}q_8)=0$，$q_3-\frac{1}{\sqrt{3}}q_8\neq 0$，取 $n=m=2$；若 $\nabla(q_3+\sqrt{3}q_8)=0$，$q_3-\frac{1}{\sqrt{3}}q_8=0$，取 $n=1$，$m=2$，则可推得 $\boldsymbol{A}^4\in S\hat{\boldsymbol{r}}$；把 q_3 换成 $-q_3$，同样讨论得 $\boldsymbol{A}^6\in S\hat{\boldsymbol{r}}$.

下面用反证法，若 $\boldsymbol{A}_{12}$，$\boldsymbol{A}^4$ 和 $\boldsymbol{A}^6$ 中有不为零者必引起矛盾.

若 $\boldsymbol{A}_{12}$，$\boldsymbol{A}^4$ 和 $\boldsymbol{A}^6$ 均不为零，则由 (37) 式得 $\boldsymbol{A}^3$，$\boldsymbol{A}^8$ 和 $\nabla\alpha$ 也都沿径向，$\alpha(\boldsymbol{r})=\alpha(r)$，再由 (21)、(25) 和引理 5 知所有 $\boldsymbol{A}^a$ 均转动不变，代入方程 (39a, b, c, e) 得 $A_4^3=A_4^8=0$，矛盾.

若 $\boldsymbol{A}_{12}$，$\boldsymbol{A}^4$ 和 $\boldsymbol{A}^6$ 中只有两个不为零，如 $\boldsymbol{A}_{12}=0$，$\boldsymbol{A}^4\neq 0$，$\boldsymbol{A}^6\neq 0$ (其它情况，如 $\boldsymbol{A}_{12}\neq 0$，$\boldsymbol{A}^4\neq 0$，$\boldsymbol{A}^6=0$，可通过适当选择规范变换 (17)，使 $\boldsymbol{A}^2=0$，讨论相同). 由 (37)、(25) 和 (39) 式知，$\boldsymbol{A}^3$，$\boldsymbol{A}^8$ 转动不变和 $A_4^3=A_4^8=0$，矛盾.

若 $\boldsymbol{A}_{12}$，$\boldsymbol{A}^4$ 和 $\boldsymbol{A}^6$ 中只有一个不为零，如 $\boldsymbol{A}^4\neq 0$，代入 (39c) 得 $A_4^3+\sqrt{3}A_4^8=0$，这是在所讨论球壳附近恒为零，故微商也为零. 联立 (38a, b) 得 $0=-\nabla^2(A_4^3+\sqrt{3}A_4^8)=i(q_3+\sqrt{3}q_8)$，与延展外源条件 (3) 矛盾. 因此，外源不均匀情况

$$A_\mu^a=0,\quad a\neq 3,8,\quad \mu=1,2,3,4,\quad -\nabla^2A_4^{3,8}=iq_{3,8},\quad \nabla\wedge\boldsymbol{A}^{3,8}\in S\hat{\boldsymbol{r}}. \tag{40}$$

设外源在 $R_1\leqslant r\leqslant R_2$ 球壳内均匀 (R_1 可为零)，在球壳外外源不均匀，在那里可选取适当规范，使规范势取 (40) 形式. 在球壳内，引入规范不变标量场

$$X=2^{n+m-1}\,\mathrm{Tr}\,[\boldsymbol{D}J_4^n\cdot\boldsymbol{D}J_4^m], \tag{41}$$

$$X=g^2b_nb_m[(\boldsymbol{A}^1)^2+(\boldsymbol{A}^2)^2]+\frac{g^2}{4}(b_n+\sqrt{3}c_n)(b_m+\sqrt{3}c_m)[(\boldsymbol{A}^4)^2+(\boldsymbol{A}^5)^2]$$
$$+\frac{g^2}{4}(-b_n+\sqrt{3}c_n)(-b_m+\sqrt{3}c_m)[(\boldsymbol{A}^6)^2+(\boldsymbol{A}^7)^2]\in S. \tag{42}$$

若 X 不是常数，$\nabla X\neq 0$，则引理 7 前提成立，(39) 式以前的讨论都有效. 分两种情况讨论：

1. ∇A_4^3 和 ∇A_4^8 不同时为零　若 $\boldsymbol{A}_{12}$，$\boldsymbol{A}^4$ 和 $\boldsymbol{A}^6$ 均不为零，则因 ∇A_4^3，$\pm\nabla A_4^3+\sqrt{3}\nabla A_4^8$ 中至少有两个不为零，由 (34) 式，$\boldsymbol{A}_{12}$，$\boldsymbol{A}^4$ 和 $\boldsymbol{A}^6$ 中至少有两个沿径向，代入 (22) 和 (33) 式，三矢量场都转动不变. 于是，和外源不均匀情况一样讨论，导致 $A_4^3=$

$A_4^8=0$，矛盾.

若 $\boldsymbol{A}_{12}$，$\boldsymbol{A}^4$ 和 $\boldsymbol{A}^6$ 中有两个不为零，例如 $\boldsymbol{A}_{12}=0$，$\boldsymbol{A}^4\neq 0$，$\boldsymbol{A}^6\neq 0$，则因 $\pm\nabla A_4^3+\sqrt{3}\nabla A_4^8$ 中至少有一个不为零，如 $\nabla A_4^3+\sqrt{3}\nabla A_4^8\neq 0$，则 $\boldsymbol{A}^4\in S\hat{\boldsymbol{r}}$，代入 (39c)

$$-\frac{g^2}{4}(A_4^3+\sqrt{3}A_4^8)^2\boldsymbol{A}^4=\frac{g^2}{4}\boldsymbol{A}^6\wedge(\boldsymbol{A}^4\wedge\boldsymbol{A}^6)=\frac{g^2}{4}(\boldsymbol{A}^6)^2\boldsymbol{A}^4-\frac{g^2}{4}(\boldsymbol{A}^4\cdot\boldsymbol{A}^6)\boldsymbol{A}^6$$

如 $\boldsymbol{A}^6/\!/\boldsymbol{A}^4$，则 $\boldsymbol{A}^6\in S\hat{\boldsymbol{r}}$，同上法得矛盾；如 $\boldsymbol{A}^6\not\parallel\boldsymbol{A}^4$，则必须 $\boldsymbol{A}^4\cdot\boldsymbol{A}^6=0$，$\boldsymbol{A}^6$ 为切矢量场. 由引理 1 和 (22) 式知 $\boldsymbol{A}^6=0$，矛盾.

若 $\boldsymbol{A}_{12}$，$\boldsymbol{A}^4$ 和 $\boldsymbol{A}^6$ 中只有一个不为零，如 $\boldsymbol{A}^4\neq 0$，$\boldsymbol{A}_{12}=\boldsymbol{A}^6=0$，如 $\nabla A_4^3+\sqrt{3}\nabla A_4^8\neq 0$，则 $\boldsymbol{A}^4\in S\hat{\boldsymbol{r}}$，代入 (39c) 式得球壳内 $A_4^3+\sqrt{3}A_4^8=0$，矛盾；如 $\nabla A_4^3+\sqrt{3}\nabla A_4^8=0$，在球壳内 $A_4^3+\sqrt{3}A_4^8$ 是常数，$\nabla^2(A_4^3+\sqrt{3}A_4^8)=0$，联立 (38a, b) 得 $g^2(A_4^3+\sqrt{3}A_4^8)\cdot(\boldsymbol{A}^4)^2=i(q_3+\sqrt{3}q_8)\neq 0$，即 $(A^4)^2$ 为常数，X 是常数，矛盾.

2. $\nabla A_4^3=\nabla A_4^8=0$　取 $Q=\boldsymbol{F}_4\cdot\boldsymbol{D}J_4^n-\boldsymbol{D}J_4^n\cdot\boldsymbol{F}_4$ 代入 (11) 式，注意 A_4^3 和 A_4^8 不能同时为零，和 (28)、(32) 式合起来，得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^1(\boldsymbol{A}^4\cdot\boldsymbol{A}^6)&=\boldsymbol{A}^4(\boldsymbol{A}^6\cdot\boldsymbol{A}^1)=\boldsymbol{A}^6(\boldsymbol{A}^1\cdot\boldsymbol{A}^4)\in S\hat{\boldsymbol{r}},\\ \boldsymbol{A}^2(\boldsymbol{A}^4\cdot\boldsymbol{A}^6)&=\boldsymbol{A}^4(\boldsymbol{A}^6\cdot\boldsymbol{A}^2)=\boldsymbol{A}^6(\boldsymbol{A}^2\cdot\boldsymbol{A}^4)\in S\hat{\boldsymbol{r}}.\end{aligned}\tag{43}$$

若 (43) 式不全为零，则 $\boldsymbol{A}_{12}/\!/\boldsymbol{A}^4/\!/\boldsymbol{A}^6/\!/\boldsymbol{r}$，如上讨论导致矛盾.

若 (43) 式全为零，则 $\boldsymbol{A}_{12}\perp\boldsymbol{A}^4\perp\boldsymbol{A}^6\perp\boldsymbol{A}_{12}$，由 (38c, d, e, g) 和 (21) 式得

$$\begin{aligned}&A_4^3(\nabla\alpha+g\boldsymbol{A}^3)\cdot\boldsymbol{A}_{12}=0,\quad(A_4^3+\sqrt{3}A_4^8)(\boldsymbol{A}^3+\sqrt{3}\boldsymbol{A}^8)\cdot\boldsymbol{A}^4=0,\\&(-A_4^3+\sqrt{3}A_4^8)(-\boldsymbol{A}^3+\sqrt{3}\boldsymbol{A}^8)\cdot\boldsymbol{A}^6=0.\end{aligned}\tag{44}$$

如 A_4^3 和 $\pm A_4^3+\sqrt{3}A_4^8$ 均不为零，将 (44) 和 (37) 式联立得 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{A}^8=\nabla\alpha=0$，再代回 (38) 和 (36) 式，$\nabla\cdot\boldsymbol{A}_{12}=\nabla\cdot\boldsymbol{A}^4=\nabla\cdot\boldsymbol{A}^6=0$，和 λ_1，λ_4，λ_6 均为常数. 用 $\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_4$ 和 $\mathbf{e}_6$ 分别表示 $\boldsymbol{A}_{12}$，$\boldsymbol{A}^4$ 和 $\boldsymbol{A}^6$ 方向的单位矢量，满足

$$\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_4=\mathbf{e}_6,\quad\boldsymbol{A}_{12}=A_{12}\mathbf{e}_1,\quad\boldsymbol{A}^4=A^4\mathbf{e}_4,\quad\boldsymbol{A}^6=A^6\mathbf{e}_6\tag{45}$$

A_{12}，A^4 和 A^6 是相应矢量的长度，它们只是 r 的函数，A^6 允许取负值. 于是

$$\begin{aligned}\nabla\wedge(A_{12}\wedge A^6)&=(A_{12}A^6)'(\hat{\boldsymbol{r}}\wedge\mathbf{e}_4)+(A_{12}A^6)(\nabla\wedge\mathbf{e}_4)\\&=\left[\frac{(A_{12}A^6)'}{(A^4)'}-\frac{A_{12}A^6}{A^4}\right](\nabla A^4\wedge\mathbf{e}_4)+\frac{A_{12}A^6}{A^4}\lambda_4\boldsymbol{A}^4\end{aligned}$$

撇代表对 r 的微商. 代入 (39c, d)，只有第一项是垂直 $\boldsymbol{A}^4$ 的，故必须为零，即

$$\frac{(A_{12}A^6)'}{(A^4)'}=\frac{A_{12}A^6}{A^4},\quad\frac{A_{12}A^6}{A^4}=\text{常数}\tag{46a}$$

同理，由 (39e, f) 有

$$\frac{A_{12}A^4}{A^6}=\text{常数}\tag{46b}$$

可见 $A_{12}=$ 常数，代入(38a, b)，A^4 和 A^6 也是常数，故 X 是常数，矛盾. 如 A_4^3 和 $\pm A_4^3+\sqrt{3}A_4^8$ 中有一个为零 (不可能有两个为零，否则 $A_4^3=A_4^8=0$，矛盾)，例如 $A_4^3=0$，则由 (38a, b) 解得

$$(\boldsymbol{A}^4)^2=\frac{2i}{3g^2}\frac{\sqrt{3}q_3+q_8}{A_4^8},\qquad(\boldsymbol{A}^6)^2=\frac{2i}{3g^2}\frac{(-\sqrt{3}q_3+q_8)}{A_4^8}$$

都是常数. 再用 (46) 式前的讨论，得 $(\boldsymbol{A}_{12})^2$ 也是常数，矛盾.

若 $\boldsymbol{A}_{12}$，$\boldsymbol{A}^4$ 和 $\boldsymbol{A}^6$ 中有一个或两个为零，则由（38a，b）立即解得其余矢量的模是常数，故 X 是常数，矛盾．这样，X 一定在球壳内是常数，由(42)式和引理6，$(\boldsymbol{A}^1)^2+(\boldsymbol{A}^2)^2$，$(\boldsymbol{A}^4)^2+(\boldsymbol{A}^5)^2$，$(\boldsymbol{A}^6)^2+(\boldsymbol{A}^7)^2$ 都是常数．但在球壳边界上（40）式给出它们都为零，于是规范势连续性条件要求 $\boldsymbol{A}^a=0$，$a\neq 3, 8$．再由 Yang-Mills 方程（1）$\mu=1, 2, 3$ 和 $a=3, 8$ 时有 $\nabla\wedge(\nabla\wedge\boldsymbol{A}^{3,8})=0$，最后我们得到

$$\left.\begin{aligned}&A^a_\mu=0,\quad a\neq 3, 8,\quad \mu=1, 2, 3, 4,\\ &-\nabla^2 A^{3,8}_4=iq_{3,8},\quad \nabla\wedge(\nabla\wedge\boldsymbol{A}^{3,8})=0,\end{aligned}\right\}\tag{47}$$

在外源不均匀区域，$\nabla\wedge\boldsymbol{A}^{3,8}\in S\hat{\boldsymbol{r}}$．可以证明这样的 $\nabla\wedge\boldsymbol{A}^{3,8}$ 必为零．以 $\nabla\wedge\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{B}$ 为例证明，它满足

$$\nabla\wedge\boldsymbol{B}=0,\quad \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0.$$

在外源不均匀区域　$\boldsymbol{B}=f(r)\hat{\boldsymbol{r}}$.

我们不讨论外源在全空间均匀的情况．设在半径为 r 的球面 Σ 附近外源不均匀，则

$$4\pi r^2(f(r))=\oint\!\!\!\!\oint_\Sigma d\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}=\iiint_V dV\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0,$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{B}=f(r)\hat{\boldsymbol{r}}=0.$$

因为 $A^{3,8}$ 无旋，所以是个梯度场，可利用规范变换（17），按（19b）适当选择 y_1，y_2，使 $\boldsymbol{A}^{3,8}=0$，于是方程解取（14）式形式：$A^{3,8}_4$ 满足我们熟知的静电泊松方程，其解为库仑解，其余分量为零．

参　考　文　献

[1] J. E. Mandula, *Phys. Lett.*, **69B**(1977), 495, J. E. Mandula and L. McLerran, *Phys. Lett.*, **73B** (1978), 193.
[2] M. Magg, *Phys. Lett.*, **77B**(1978), 199.
[3] 东方晓、周成建、黄涛、薛丕友，高能物理与核物理，**5**(1981)，724.
[4] P. Sikivie and N. Weiss, *Phys. Rev.*, D18(1978), 3809, 注意此文注 [14].
[5] 参看一般的拓扑学教科书，如：W. G. Chinn and N. E. Steenrod, 中译本，王昌锐译«拓扑学基本概念»，100 页.

CLASSICAL STATIC AND SPHERICALLY SYMMETRIC SOLUTION OF $SU(3)$ GAUGE FIELD WITH A STATIC AND ECTERNAL EXTERNAL SOURCE

Ma Zhong-qi　Dong Fang-xiao　Zhou Xian-jian　Xue Pei-you

(Institute of Hiph Energy Physics, Academia Sinica)

Abstract

It has been shown that the classical $SU(3)$ Yang-Mills equation with a static and extended external source has static and spherically symmetric solutions only for spherically symmetric external source, and in that external source there is no further static and spherically symmetric solution besides the Coulombic one.