

利用高频四极场对质子同步加速器 中空间电荷力的补偿

方 守 贤

(中国科学院高能物理研究所)

摘 要

本文对同步加速器中由于空间电荷力引起的束团频移的补偿问题作了定量的探讨,指出不论束团沿纵向为抛物线分布或高斯分布,除直流分量外,只要引入与高频加速场频率相等的基波(或至多再加上二次谐波)的四极场,就能有效地将大部分粒子的线性频移抵消到足够小的程度,从而使非线性频移确定的空间电荷限比通常无补偿时提高到一倍多。

一个质子同步加速器所能达到的流强,取决于很多因素,其中主要的因素之一是该质子同步加速器的空间电荷限。随着加速器技术的提高有好几个加速器已接近它的空间电荷限,特别是近几年来负离子注入技术的成功,空间电荷限已经不再被认为是不能接近的了。因此如何提高空间电荷限对加速器设计来说将是一个十分有兴趣的问题。

本文根据文[1]的建议,对空间电荷力的补偿进行了探讨。指出在低能量时只要在加速器中引入一定形式的与束团同步的高频四极场,则束团内部空间电荷力的线性部分基本上将会得到抵消,至于空间电荷力的非线性部分,目前尚未找到有效的补偿办法。因此采用高频四极场后,一定条件下加速器的空间电荷限将主要取决于空间电荷力的非线性力引起的频移。一般说来,这一极限值至少提高一倍多。

一、未聚束时束流空间电荷力引起的频移及其补偿

当束流刚从直线加速器注入到同步加速器时,束流尚未聚束。此时可设束流密度 ρ 沿纵向为均匀分布,沿横向在椭圆形截面内为抛物线分布,即

$$\left. \begin{aligned} \rho(x, z, \theta) &= \rho(\theta)f(x, z), \quad \rho(\theta) = \rho_0 = \frac{cN}{2\pi R}, \\ f(x, z) &= \frac{2}{\pi ab} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} \right), \quad \text{对于 } x \leq a, \quad z \leq b \\ f(x, z) &= 0, \quad \text{对于 } x > a, \quad z > b \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中 c 为粒子电荷, N 为总粒子数, R 为加速器半径, a, b 为束流椭圆截面的长短

轴,相应的束流自场为^[2]

$$\left. \begin{aligned} E_x(x, z) &= \frac{2\rho_0}{\pi} \left[\frac{x}{a(a+b)} - \frac{2a+b}{3a^3(a+b)^2} x^3 - \frac{1}{ab(a+b)^2} xz^2 \right], \\ E_z(x, z) &= \frac{2\rho_0}{\pi} \left[\frac{z}{b(a+b)} - \frac{2b+a}{3b^3(a+b)^2} z^3 - \frac{1}{ab(a+b)^2} xz^2 \right], \\ H_x &= \beta E_z, \quad H_z = \beta E_x. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

在此 E_x, E_z, H_x, H_z 分别为电场及磁场分量, x, z 分别为水平及垂直方向坐标. 将(2)式代入运动方程式,采用通常所用的方法,即可求得空间电荷力引起的自由振荡频率 ν_x, ν_z 的改变量 $\Delta\nu_x, \Delta\nu_z$ ^[3]. 今将此改变量分成两部分,

$$\Delta\nu_x = \Delta\nu_{x\text{lin}} + \Delta\nu_{x\text{nonlin}}.$$

其中 $\Delta\nu_{x\text{lin}}$ 是通常的线性频移,由空间电荷线性力引起. 众所周知,抛物线分布引起的频移将比均匀分布的频移大一倍¹⁾.

即

$$\Delta\nu_{x\text{lin}} = \frac{2Nr_p R}{\nu_x \beta^2 \gamma^3 \pi} \left(\frac{1}{a^2 \left(1 + \frac{b}{a}\right)} \right), \quad \Delta\nu_{z\text{lin}} = \frac{2Nr_p R}{\nu_z \beta^2 \gamma^3 \pi} \left(\frac{1}{b^2 \left(1 + \frac{a}{b}\right)} \right). \quad (3)$$

而 $\Delta\nu_{x\text{nonlin}}$ 为非线性频移,由非线性空间电荷力引起,其值为

$$\begin{aligned} \Delta\nu_{x\text{nonlin}} &= \frac{1}{2} \Delta\nu_{x\text{lin}} \left[\frac{2a+b}{2(a+b)} \left(\frac{x_{\text{max}}}{a} \right)^2 + \frac{b}{a+b} \left(\frac{z_{\text{max}}}{b} \right)^2 \right] \\ \Delta\nu_{z\text{nonlin}} &= \frac{1}{2} \Delta\nu_{z\text{lin}} \left[\frac{a}{a+b} \left(\frac{x_{\text{max}}}{a} \right)^2 + \frac{a+2b}{2(a+b)} \left(\frac{z_{\text{max}}}{b} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (4)$$

式中 γ 为粒子总能与静止能之比, β 为粒子速度与光速之比, r_p 为质子经典半径, $x_{\text{max}}, z_{\text{max}}$ 为某粒子自由振荡振幅. 在此,我们略去了束流在真空室壁及磁极面上的镜像力的影响,这在低能量时不会引起很大的误差.

今以 BPS 50 GeV 质子同步加速器为例,该机器的 $R = 216 \text{ m}$, $\nu_x \approx \nu_z \approx 13.75$, 如设束流横截面的尺寸 $b = 3.8 \text{ cm}$, $a = \sqrt{3} b = 6.6 \text{ cm}$, 如用 200 MeV 直线加速器注入,注入时总粒子数为 $N = 1.5 \times 10^{13}$, 则相应的频移为

$$\begin{aligned} \Delta\nu_{x\text{lin}} &= 0.117, \quad \Delta\nu_{z\text{lin}} = 0.205, \\ \Delta\nu_{x\text{nonlin}} &= 0.048, \quad \Delta\nu_{z\text{nonlin}} = 0.064, \quad (\text{当 } x_{\text{max}} = a, z_{\text{max}} = 0) \\ \Delta\nu_{x\text{nonlin}} &= 0.022, \quad \Delta\nu_{z\text{nonlin}} = 0.070, \quad (\text{当 } x_{\text{max}} = 0, z_{\text{max}} = b) \end{aligned}$$

由此可见,非线性频移仅约线性频移的 $\frac{1}{3}$. 线性频移对束团中的每一个粒子是一样的,因此可以用四极子来校正. 也就是说,在整个注入过程中随着流强的增强,逐步增加四极子的强度使总的线性频移为 0. 此时剩下的为非线性频移,它将使整个束团的频率分散在一定的范围中. 今如要求此范围约束在离稳定区边界约 $\Delta\nu = 0.05$ 的区域内,则

1) 为了与均匀分布时的结果一致,在利用(3)式求空间电荷限时应令 $\Delta\nu = 0.4$.

$|\Delta\nu|_{\max} \leq 0.4$, 与此相应的空间电荷限为

$$N_{\text{unbunch}} = \frac{\pi b^2 \left(1 + \frac{a}{b}\right) v_z \beta^2 \gamma^3}{r_p R} \cdot \frac{2 \left(1 + \frac{a}{b}\right)}{2 + \frac{a}{b}} |\Delta\nu|_{\max}. \quad (5)$$

上式给出之值约比线性频移决定之值大了一倍多。

很容易使人们联想到非线性频移是否也能补偿的问题。对于抛物线分布, 此非线性项相应一八极场, 因此可以设想在加速器中引入八极磁铁。但是, 众所周知, 八极磁铁所产生的频移具有如下形式

$$\begin{aligned} \Delta\nu_x &= \frac{B_{z_i}'' a^2 \Delta s \beta_{z_i}}{8\pi B_0 \rho} \left(\frac{1}{2} \frac{x_{\max}^2}{a^2} - \frac{b^2}{a^2} \frac{z_{\max}^2}{b^2} \right), \\ \Delta\nu_z &= \frac{B_{z_i}'' a^2 \Delta s \beta_{z_i}}{8\pi B_0 \rho} \left(-\frac{x_{\max}^2}{a^2} + \frac{1}{2} \frac{b^2}{a^2} \frac{z_{\max}^2}{b^2} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

在此, $\beta_z'' = \frac{\partial^3 B_z}{\partial x^3}$, Δs 分别为八极子强度及长度, β_{z_i} , β_{z_i} 为八极子所在点之 β 函数值, $B_0 \rho$ 为加速器之场强及曲率半径。由此可见, 由于 x_{\max}^2 项系数的符号与 z_{\max}^2 项不同; 利用不同极性不同位置八极子的组合, 显然不可能同时抵消公式 (4) 中所有粒子的非线性频移。初步分析表明, 能使所有粒子 (或绝大部分粒子) 的非线性频移同时抵消的一种可能的磁场应具有如下的形式

$$\left. \begin{aligned} B_z &= (\alpha_1 + \alpha_2)z - (3\alpha_1'' x^2 z + \alpha_2'' z^3)/12, \\ B_x &= (\alpha_1 + \alpha_2)x - (\alpha_1' x^3 + 3\alpha_2' x z^2)/12, \\ B_z &= (\alpha_1' + \alpha_2')xz - (\alpha_1''' x^3 z + \alpha_2''' x z^3)/12. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中 B_i 是指沿方位角的磁场分量, α_1, α_2 是弧长 s 之任意函数, “'”指对 s 的微分。这恰恰与四极磁铁端部沿方位角的散磁相似。由于它同时有四极场, 因此这种场的产生及引入尚需仔细研究。

二、聚束时束流空间电荷引起的频移及其补偿

设束流在纵向形成 M 个束团, 每束团的长度为 l 。首先, 让我们来研究一下粒子在纵向也按抛物线分布的情况, 即 (1) 式中 $\rho(\theta)$ 具有如下的形式

$$\rho(\theta) = \frac{\rho_0}{B_f} \left(1 - \left(\frac{2R}{l} \right)^2 \theta^2 \right). \quad -\frac{l}{2R} \leq \theta \leq \frac{l}{2R} \quad (8)$$

在此 B_f 为聚束因子, 对于抛物线分布 $B_f = \frac{Ml}{3\pi R}$, 通常束团的纵向尺寸比束团的横向尺寸大得多, 即 $l \gg a, b$ 。因此可以近似地认为横向电场仍具有 (2) 式的形式, 只要将该式中的 ρ_0 代以 (8) 式的 $\rho(\theta)$ 即可。由于束团密度沿纵向的变化, 束团的自场强度也沿着纵向变化。在束团中心为极大, 在束团的头尾渐趋近于零。因此, 当高频加速系统加上后, 整个束团内的粒子频率在稳定图中的分布将大大扩展, 犹如一领带, 领带的长度由束团中心的线性频移决定, 宽度则由粒子的非线性频移决定; 当粒子作相振荡时相应的工作

点也在领带内作振荡。值得指出的是,由于聚束因子 B_F 的作用,线性及非线性频移将比未聚束时大 $\frac{1}{B_F}$ 倍,当 $B_F = 0.5$, 即大了一倍,这是十分可观的,因此建议由高频四极子给以补偿。

今求束团中粒子密度沿轨道的谐波分量 C_{KM} , 并设束团数 M 恰与高频加速场的谐波数相等。

令

$$\rho(\theta) = \frac{\rho_0}{B_F} \sum_K C_{KM} e^{iKM\theta}, \quad (9)$$

对于抛物线分布

$$C_{KM} = \frac{4R}{\pi K^2 M l} \left[\frac{2R}{KMl} \sin \frac{KMl}{2R} - \cos \frac{KMl}{2R} \right] \quad (10)$$

而且 $C_{KM} = C_{-KM}$.

表 1 中给出了不同聚束程度情况下(相应于不同的束团长度 $\frac{Ml}{R}$ 及聚束因子), 各次谐波的幅值。

表 1

$\frac{Ml}{R}$	$\frac{1}{B_F}$	$\frac{C_0}{B_F}$	$\frac{2C_M}{B_F}$	$\frac{2C_{2M}}{B_F}$	$\frac{2C_{3M}}{B_F}$	$\frac{2C_{4M}}{B_F}$
2π	1.50	1	0.608	-0.152	0.068	-0.038
$1. \pi$	1.67	1	0.798	-0.171	0.057	-0.018
1.5π	2.00	1	1.088	-0.057	-0.078	0.068
1.33π	2.25	1	1.251	0.100	-0.152	0.052

注意, 其中直流分量 $\frac{C_0}{B_F}$ 为一常数, 而其它分量 $\frac{C_{KM}}{B_F}$ 将随聚束程度的加强而增加, 这是容易理解的, 随着聚束程度的增加, 束流的平均强度决不会因此而改变的, 而其谐波分量将越来越大。因此, 当注入过程结束而转入到同步加速状态时, 补偿用的直流四极场将维持不变, 此时, 只要迅速增加不同谐波的高频四极场的强度以适应束流的聚束程度即可。

有兴趣的是到底要用多少次谐波才能把空间电荷的线性频移抵消到足够小的程度。为此我们仅取展开式 (9) 中最初的一或两项 C_{KM} ; 即令

$$\begin{aligned} \rho_1(\theta) &= \rho_0 \left[1 + \frac{2C_M}{B_F} \cos M\theta \right], \\ \rho_2(\theta) &= \rho_0 \left[1 + \frac{2C_M}{B_F} \cos M\theta + \frac{2C_{2M}}{B_F} \cos 2M\theta \right], \end{aligned} \quad (11)$$

并研究 ρ_1, ρ_2 与精确表达式 (8) 的差别, 其结果画在图 1 中。由图可见, 如采用两项, 在不同聚束程度下, 沿束团长度的绝大部分其误差 $\frac{\rho_2(\theta) - \rho(\theta)}{\rho_0}$ 小于 $\sim 5\%$, 只有在束团

尾部 $0.1 \frac{l}{R}$ 的区域内误差较大。而对于抛物线分布，该区域仅含 $\leq 6\%$ 的粒子，因此大致可以说，如果在高频四极子中，仅引入两项最低次的谐波，那么将有 95% 的粒子的线性频移可被校到 5%，再之，由同图可知，即使只用一项，即高频场的基波，95% 粒子的频移也可被校到 $\leq 15\%$ ，这仍然是十分令人满意的。

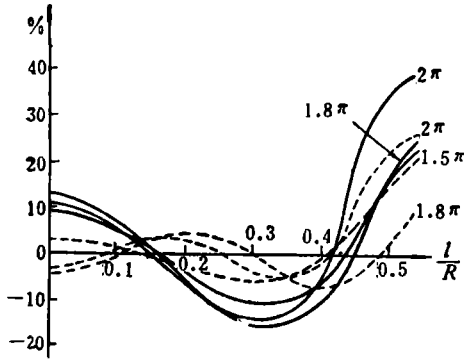


图 1 $\frac{\rho_1(\theta) - \rho(\theta)}{\rho_0}$;
 $\frac{\rho_2(\theta) - \rho(\theta)}{\rho_0}$

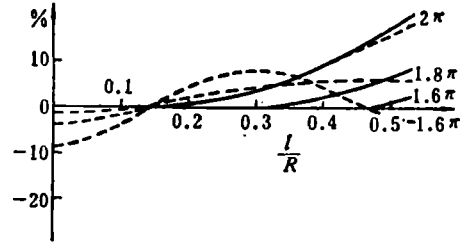


图 2 $\frac{\rho_1(\theta) - \rho(\theta)}{\rho_0}$;
 $\frac{\rho_2(\theta) - \rho(\theta)}{\rho_0}$

现在再让我们来看一下纵向为高斯分布的情况，即令

$$\rho(\theta) = \frac{\rho_0}{B_F} \exp\left[-\frac{R^2\theta^2}{2\sigma^2}\right], \tag{12}$$

其中 $l = 4\sigma$ 为束团长度， $B_F = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{Ml}{2\pi R}$ ；相应的谐波分量为

$$C_{KM} = \frac{Ml}{4\sqrt{2\pi}R} \exp\left[-\frac{K^2M^2l^2}{32R^2}\right].$$

在不同聚束程度时各谐波分量的强度见表 2。

由表可见，随着 K 的上升 e_{KM} 下降的速率比抛物分布快得多。采用上述相同的方法，可以研究相应的误差，其结果可见图 2。总的说来，对于高斯分布，如取两项最低次谐波，其误差要比抛物线分布小得多。如取一项，则其误差在绝大多数情况下也小于 10%；即只有在 $\frac{Ml}{R} \simeq 2\pi$ 时（即在刚开始聚束阶段），靠近束团尾部 $\theta \geq 0.45 \frac{l}{R}$ 的区域内，误差大于 10%，而这一区域内的粒子仅占 3%。

表 2

$\frac{Ml}{R}$	$\frac{1}{B_F}$	$\frac{C_0}{B_F}$	$\frac{C_M}{B_F}$	$\frac{C_{2M}}{B_F}$
2.0π	1.60	1	0.584	0.014
1.8π	1.78	1	0.738	0.036
1.6π	2.00	1	0.910	0.085
1.4π	2.29	1	1.096	0.178

值得指出，不论那一种分布， C_1 的强度随束团宽度的缩小近似地线性上升，且对于不同分布不甚敏感，这对运行来说也许是方便的。

由此可见,只要在四极场中,除直流分量外再引入一高频加速场的基波或至多连它的第二次谐波,就能抵消绝大部分粒子的线性频移。在这种情况下,空间电荷限将由非线性频移决定,其公式与(5)式相似,仅差一聚束因子。即

$$N_{fc}^{\text{bunch}} = \frac{\pi b^2 \left(1 + \frac{a}{b}\right) \nu_x \beta^2 \gamma^3 B_F}{r_p R} \frac{2 \left(1 + \frac{a}{b}\right)}{2 + \frac{a}{b}} \Delta \nu. \quad (13)$$

三、四极子的安放

显然,对于上述线性频移的一个比较简单的补偿办法是利用两组四极子;一组安放在F铁后面,强度为 K_F ;另一组放在D铁后面,强度为 K_D ;每组内部四极子之间的距离应相隔 $\frac{2\pi}{M}$,便于与束团同步。如设束团中心通过F铁时,高频四极场恰处于极值,F铁与D铁间的方位角相差为 θ_1 ,则 K_F 及 K_D 为

$$K_F(t) = A_F \left(1 + \frac{2C_M}{B_F} \cos \omega t + \frac{2C_{2M}}{B_F} \cos 2\omega t \right),$$

$$K_D(t) = A_D \left(1 + \frac{2C_M}{B_F} \cos(\omega t - M\theta_1) + \frac{2C_{2M}}{B_F} \cos(2\omega t - 2M\theta_1) \right).$$

其中 A_F, A_D 为与加速参数有关之量。可由运动方程式求得。 C_M, C_{2M} 需随聚束程度的改变而改变。由于近代加速器脉冲之间良好的重复性, C_M, C_{2M} 可凭经验来控制。

四、小 结

随着加速器技术的进展,利用高频四极场对强流质子同步加速器注入前后的空间电荷效应进行补偿看来是一个有效而可行的办法。如能成功,则可进一步提高现有加速器的流强,或在今后设计加速器时,减小磁铁的孔径,降低造价。这一想法是威尔逊教授(R. R. Wilson)在今年夏季访华时提出的,本工作是在他的启发及推动下进行的,特此表示感谢。

参 考 文 献

- [1] B. R. Wilson, Raising the Space-charge limit of a Synchrotron by means of R. F. quadrupoles FNAL report, TM-890 (1979).
- [2] B. W. Zotter, Q-shift due to the direct space-charge field of stacked particle beams, CERN/ISR-TH/75-5.
- [3] J. Gareyte, L. Magnani, F. Pedersen, F. Sacherer and K. Schindl, Beam dynamic experiments in the CERN ps booster, CERN/MPS/Int, BR/75-5.

COMPENSATION OF THE SPACE CHARGE FORCE IN A SYNCHROTRON BY MEANS OF RF QUADRUPOLE

FANG SHOU-XIAN

(Institute of High Energy Physics, Academia Sinica)

ABSTRACT

Quantitative analysis of the space charge force compensation by means of RF quadrupoles in a synchrotron is given. For a bunched beam, if RF quadrupole magnets operating at the fundamental RF frequency (or at most the fundamental and the second harmonic frequency) are applied, the linear betatron turn shift $\Delta\nu$, excited by the linear part of space charge force, would be diminished effectively for the most particles, either in parabolic distribution at longitudinal direction or in Gaussian distribution. Then the space charge limit, mainly decided by nonlinear turn shift, would be raised twice as large as that given in Laslett formular.