

深部非弹性碰撞中动力学与扩散方程的一种关联处理

钟纪泉

(中国科学院近代物理研究所)

摘 要

本文在动力学方程和扩散方程的基础上,通过它们的一种关联,提供由核摩擦系数确定弛豫时间以及传输系数的可能。角动量弛豫时间和角动量传输系数的计算表明,此方法,讨论重离子碰撞中的耗散与统计涨落是方便的。

一、前 言

近几年来,随着重离子物理领域的发展,在深部非弹性碰撞中,各种宏观量,例如碎片质量、相对动能以及相对角动量的弛豫过程,能够被观察到^[1-3]。因此,各种弛豫过程的讨论,引起了人们的兴趣。耗散重离子碰撞的理论处理,除了非平衡量子统计处理外,较多地采用动力学方程和扩散方程。扩散方程用传输系数,即漂移和扩散系数确定宏观变量的几率分布随时间的变化,而动力学方程则通过摩擦力确定宏观变量平均值随时间的耗散特征。

众所周知,动力学方程在描述深部非弹性碰撞的主要特征方面,获得了一定的成功,可以给出碰撞过程中相对运动的角分布、动能损失、角动量损失、偏转函数、限制全熔合的临界角动量,以及核平均相互作用时间等^[4-7]。扩散方程目前所讨论的主要对象是能量耗散 $d\sigma^2/d\theta dE$ 、角动量转移,以及质量、电荷交换 $d^2\sigma/d\theta d\alpha$ 等。两个方面的理论,虽然各强调了不同的运动形态,但具有内在的联系,因此,将二者关联处理是必须的。但是,目前由于人们对深部非弹性碰撞的许多物理性质不是十分清楚,在这里,我们不是对动力学方程和扩散方程进行直接的自治求解,而是在某些简化条件下,得到动力学方程和扩散方程的解析解,由此得到反映两个方程核心问题的摩擦系数和传输系数的直接联系,从而获知深部非弹性的有关知识。基本方法是,认为扩散方程的一级矩满足经典动力学方程,二级矩的方程给出关于平均值的统计涨落。在二级矩的方程中,扩散系数能够应用涨落耗散定理,即高温极限下的爱因斯坦关系,由漂移系数而得到。

这样一个方法,由于某些近似条件的引入,尽管在一些实际应用中,可能会带来若干不确定性,但是对于了解在深部非弹性碰撞中,各种物理量的耗散与涨落的决定性特征,

以及两种运动形态的关系,可能是有效而简便的.

此外,根据这种关联处理,我们由摩擦系数,计算了角动量弛豫时间以及角动量传输系数,并与一些已有的结果作了比较.

二、动力学方程

在讨论动力学过程中,我们引进如下自由度,即两碰撞核的质心间距离 r , 两核质心联线的转动角 θ , 以及描述每个核绕着自己中心关于实验室固定取向的转动角 β_1 与 β_2 (见图 1). 为简化起见,冻结碰撞核的形变自由度,同时不考虑两核之间的质量不对称自由度. 系统的拉格朗日函数可以写为

$$L(r, \theta, \beta_i) = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \mu r \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \mathcal{I}_i \dot{\beta}_i^2 - V_N - V_C. \quad (1)$$

其中 μ 是折合质量, \mathcal{I}_i 是 i 核的内禀转动惯量, V_N 是核势, V_C 是库仑势. 假定摩擦力正比于速度,且切向摩擦力正比于两个碰撞核的相对速度,那末动力学方程组为^[8]

$$\begin{cases} \mu \ddot{r} - \mu r \dot{\theta}^2 + \frac{\partial V_N}{\partial r} + \frac{\partial V_C}{\partial r} = -k_r \dot{r}; & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu r^2 \ddot{\theta} + 2\mu r \dot{r} \dot{\theta} + \sum_{i=1}^2 \frac{d}{dt} (\mathcal{I}_i \dot{\beta}_i) = 0; & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} (\mathcal{I}_1 \dot{\beta}_1) = -R_1 f_\theta(r) [R_1(\dot{\beta}_1 - \dot{\theta}) + R_2(\dot{\beta}_2 - \dot{\theta})]; & (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} (\mathcal{I}_2 \dot{\beta}_2) = -R_2 f_\theta(r) [R_1(\dot{\beta}_1 - \dot{\theta}) + R_2(\dot{\beta}_2 - \dot{\theta})], & (5) \end{cases}$$

其中 R_i 是核 i 的半密度半径. 切向摩擦系数 $f_\theta(r)$ 包括形式因子和强度数值因子.

由方程 (3)–(5), 我们得到

$$\begin{aligned} \mu r^2 \ddot{\theta} + 2\mu r \dot{r} \dot{\theta} = f_\theta(r) & \left[\frac{R_1}{R_1 + R_2} \dot{\beta}_1 \right. \\ & \left. + \frac{R_2}{R_1 + R_2} \dot{\beta}_2 \right] - f_\theta(r) \dot{\theta}. \end{aligned} \quad (6)$$

为了使问题讨论更简化,和纽伦伯格等作者一样^[9],假定碰撞核对于角动量损失 $M = I_1 + I_2$ 的分配,正比于它们的惯量矩,即

$$I_1/I_2 = \mathcal{I}_1/\mathcal{I}_2. \quad (7)$$

则方程 (6) 变为

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= f_\theta(r) (\dot{\theta} - M/\mathcal{I}_{int}) = \gamma_{\theta\theta}(r) r^2 (\dot{\theta} - M/\mathcal{I}_{int}) \\ &= \gamma_{\theta\theta} I_i / \mu - \gamma_{\theta\theta} \mathcal{I}_{tot} M / \mu \mathcal{I}_{int}, \end{aligned} \quad (8)$$

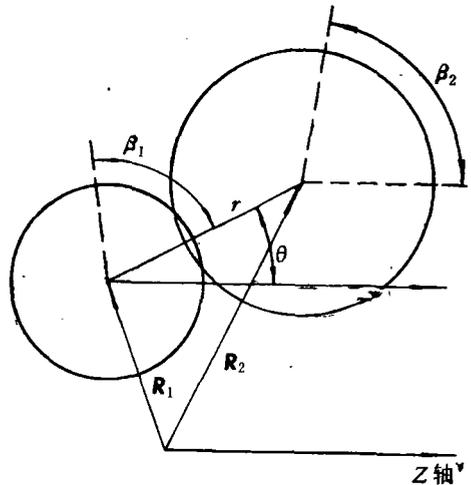


图 1 动力学变量的定义, Z 轴固定于实验室系

其中, $\mathcal{F}_{\text{tot}} = \mathcal{F}_{\text{rel}} + \mathcal{F}_{\text{int}}$, $\mathcal{F}_{\text{int}} = \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2$, \mathcal{F}_{rel} 是碰撞核的相对惯量矩, $\gamma_{\theta\theta}(r)$ 近似可以取通常的切向摩擦系数^[7]. 方程(8)的解是

$$M = M_{st}(1 - e^{-t/\tau_l}), \quad (9)$$

其中

$$\tau_l = \mu \mathcal{F}_{\text{int}} / \gamma_{\theta\theta} \mathcal{F}_{\text{tot}} \quad (10)$$

称为角动量弛豫时间. $M_{st} = \mathcal{F}_{\text{int}} l_i / \mathcal{F}_{\text{tot}}$, 是粘边极限角动量损失.

可见, 角动量弛豫时间可以用切向摩擦系数进行计算. 如果我们还获知核平均相互作用时间的话, 利用公式(9)就可以讨论角动量的弛豫过程.

三、扩散方程

像通常那样, 扩散方程我们采用如下形式的福克-普朗克方程

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} (v_x P(x, t)) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (D_x P(x, t)), \quad (11)$$

对于角动量耗散, 我们有

$$\frac{\partial}{\partial t} P(M, t) = -\frac{\partial}{\partial M} (v_M P(M, t)) + \frac{\partial^2}{\partial M^2} (D_{MM} P(M, t)), \quad (12)$$

其中, $M = l_i - l(t)$, v_M 是角动量漂移系数, D_{MM} 是角动量扩散系数. 用 M 乘(12)式两边, 并且对 M 求积分, 考虑到 $P(M, t)$ 的边界条件, 得到一级矩满足的方程

$$\frac{d\langle M \rangle}{dt} = \langle v_M \rangle, \quad (13)$$

同样, 我们得到二级矩 $\sigma_{MM}^2 = \langle M^2 \rangle - \langle M \rangle^2$ 所满足的方程

$$\frac{d}{dt} \sigma_{MM}^2 = 2\langle D_{MM} \rangle + 2\langle v_M M \rangle - 2\langle v_M \rangle \langle M \rangle. \quad (14)$$

为了得到方程(13)和(14)解的分析表达式, 我们将角动量传输系数对角动量耗散 M , 在 $M = 0$ 附近作展开, v_M 取到一级项, D_{MM} 取到零级项, 也就是:

$$v_M \cong v_M^0 + \left(\frac{\partial v_M^0}{\partial M} \right) M, \quad (15)$$

$$D_{MM} \cong D_{MM}^0. \quad (16)$$

由(13)–(16)式, 我们得到 $\langle M \rangle$ 和 σ_{MM}^2 的解分别是

$$\langle M \rangle = M_{st}(1 - e^{-t/\tau_l}) \quad (17)$$

与

$$\sigma_{MM}^2 = D_{MM}^0 \tau_l (1 - e^{-2t/\tau_l}). \quad (18)$$

其中, $M_{st} = -v_M^0 / \partial v_M^0 / \partial M$, $\tau_l = -1 / \partial v_M^0 / \partial M$. 角动量弛豫时间 τ_l , 用扩散系数, 由爱因斯坦关系, 可以表示为 $\tau_l = \frac{\mathcal{F}_{\text{int}} \mathcal{F}_{\text{rel}}}{\mathcal{F}_{\text{tot}}} (T / D_{MM})_{M=0}$. 由于 D_{MM}^0 对 l 的依赖关系弱^[10], 所以 τ_l 对 l 的依赖关系也是弱的, 从这个意义上说, 我们应该把 τ_l 称为平均角动量弛豫时间.

四、角动量弛豫时间及传输系数

由扩散方程一级矩满足动力学方程, 我们得到角动量弛豫时间

$$\tau_l = \frac{\mathcal{F}_{\text{int}} \mathcal{F}_{\text{rel}}}{\mathcal{F}_{\text{tot}}} (T/D_{MM})^0 = \frac{\mu}{\gamma_{\theta\theta}} \frac{\mathcal{F}_{\text{int}}}{\mathcal{F}_{\text{tot}}}, \quad (19)$$

角动量传输系数

$$v_M = -\gamma_{\theta\theta} r^2 \left(-\frac{l_i - M}{\mathcal{F}_{\text{rel}}} + \frac{M}{\mathcal{F}_{\text{int}}} \right), \quad (20)$$

根据涨落耗散定理,或爱因斯坦关系^[10]

$$v_M = -\frac{D_{MM}}{T} \left(-\frac{l_i - M}{\mathcal{F}_{\text{rel}}} + \frac{M}{\mathcal{F}_{\text{int}}} \right), \quad (21)$$

比较 (20) 和 (21), 我们得到

$$D_{MM} = \gamma_{\theta\theta} r^2 T. \quad (22)$$

由 (10)、(19)、(20) 及 (22) 式看出, 我们可以用摩擦系数来确定 τ_l , v_M 及 D_{MM} . 显然, 它们是碰撞核质量不对称自由度 A_1/A 、总质量 A 以及质心间距离 r 的函数. 如果 $\gamma_{\theta\theta}$ 依赖于角动量 l 的话, 那末这些量同样是 l 的函数, 目前没有考虑这种依赖关系. 本文, 我们将由摩擦系数确定这些量, 并将计算的传输系数同微观传输理论结果^[10] 进行比较.

计算中, 摩擦系数我们取了格罗斯等^[11] 的两种不同形式, 一种是费米函数形式, 另一种是摩擦力正比于核力的平方. 费米函数形式是

$$\gamma_{\theta\theta} = 10[1 + \exp((r - R_f)/a_f)]^{-1}, \quad (23)$$

其中, $R_f = \left(\sum_{i=1}^2 R_i^{(f)} + 2.7 \right) \text{fm}$, $R_i^{(f)} = (1.12A_i^{1/3} - 0.86A_i^{-1/3}) \text{fm}$, $a_f = 0.65 \text{fm}$, $\gamma_{\theta\theta}$ 的量纲是 $[10^{-23} \text{Mev} \cdot \text{sec}/\text{fm}^2]$. 摩擦力正比于核力的平方形式为:

$$\gamma_{\theta\theta} = 0.01(\nabla V_N)^2. \quad (24)$$

量纲和 (23) 式相同.

计算角动量扩散系数 D_{MM} 时, 需知局部核温度 T , T 的表达式取为^[12]

$$T_l(E_i^* \cdot A_1/A) = 3.46 \sqrt{E_i^*/A} \quad (25)$$

其中, 激发能 E_i^* 取为

$$E_i^*(A_1/A) = E_{C.M} - \frac{e^2}{R_0} (Z/A)^2 A_1 A_2 - V_N(A_1/A) - \frac{(l_i - M)^2}{2\mathcal{F}_{\text{rel}}^0} - \frac{M}{\mathcal{F}_{\text{int}}}. \quad (26)$$

计算中, 取 $R_0 = 1.2(A_1^{1/3} + A_2^{1/3})$, $Z/A = 0.5(1 - 0.006A^{2/3})$. 相互作用核势取“接近势”形式^[13]

$$V_N(s) = -4\pi\gamma \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \begin{cases} \frac{5}{3} (1 + s/s_0) \exp\left(-\frac{8}{5} \frac{s}{s_0}\right), & s \geq 0, \\ \frac{5}{3} - \frac{s}{s_0} - \left(\frac{s}{s_0}\right)^2, & s < 0 \end{cases} \quad (27)$$

其中, $s = r - (R_1 + R_2)$. 计算中取 $R_i = 1.2A_i^{1/3}$, $s_0 = \text{fm}$, $\gamma = 1 \text{MeVfm}^{-1}$.

除此, 擦边角动量的计算公式取

$$l_{gr} = 0.22R \left[\mu \left(E_{C.M} - \frac{e^2}{R} (Z/A)^2 A_1 A_2 \right) \right]^{1/2}, \quad (28)$$

其中, 取 $R = 0.5 + 1.36(A_1^{1/3} + A_2^{1/3})$.

五、结果和讨论

我们具体给出了两种不同摩擦形式(23)与(24)的切向摩擦系数 $\gamma_{\theta\theta}$ 随碰撞核质心距离 r 的变化,由此计算了角动量弛豫时间 τ_l 随 r 的变化.同样,我们计算了 $\gamma_{\theta\theta}$ 以及 τ_l 随碰撞系统质量不对称自由度 A_1/A ,以及系统总质量 A 的变化.这些结果在图2中分别给出.由这些图看出,角动量弛豫时间 $\tau_l \sim 1-2 \times 10^{-21}$ sec.在大的碰撞核质心距离 r 的地方,角动量弛豫时间特别长,对(24)式摩擦形式, $\tau_l \sim 10 \times 10^{-21}$ sec.考虑到纽伦伯格等给出的径向动能弛豫时间 $\tau_R \sim 0.3 \times 10^{-21}$ sec^[22],因此,在大的距离,例如擦边距离附近,径向动能损失是主要的,角动量损失是次要的,可以不考虑.相反,在小的距离,例如粘边距离附近,则可以近似地认为径向动能已完全耗散掉,而只有角动量耗散.角动量弛豫时间 τ_l 随系统不对称自由度 A_1/A 的变化指出,除了 $A_1/A \approx 0.1$ 附近值外,对于其他 A_1/A 值, τ_l 基本上是常数,即 $\tau_l \approx 1.45 \times 10^{-21}$ sec.而 τ_l 随系统总质量 A 的变化则不是这样,由 $A = 50$ 到 $A = 250$, τ_l 由 0.3×10^{-21} sec增加到 3.3×10^{-21} sec.另外,在 $r = R_0 = 1.2(A_1^{1/3} + A_2^{1/3})$ 距离,对于 $A \approx 250$, $A_1/A \sim 0.3-0.5$ 范围,计算得到的 $\tau_l \approx 1.45 \times 10^{-21}$ sec,同纽伦伯格等^[22]的结果 $\tau_l = 1.5 \times 10^{-21}$ sec,大致相符.但是,我们要特别说明的是,他们在讨论两个不同反应道 $^{86}\text{Kr} + ^{166}\text{Er}$ 与 $^{136}\text{Xe} + ^{209}\text{Bi}$ 时,取相同的 τ_l 计算平均核相互作用时间,这似乎是不合适的.对于这两个反应道的相应能量,我们计算的 τ_l ,列在表中.

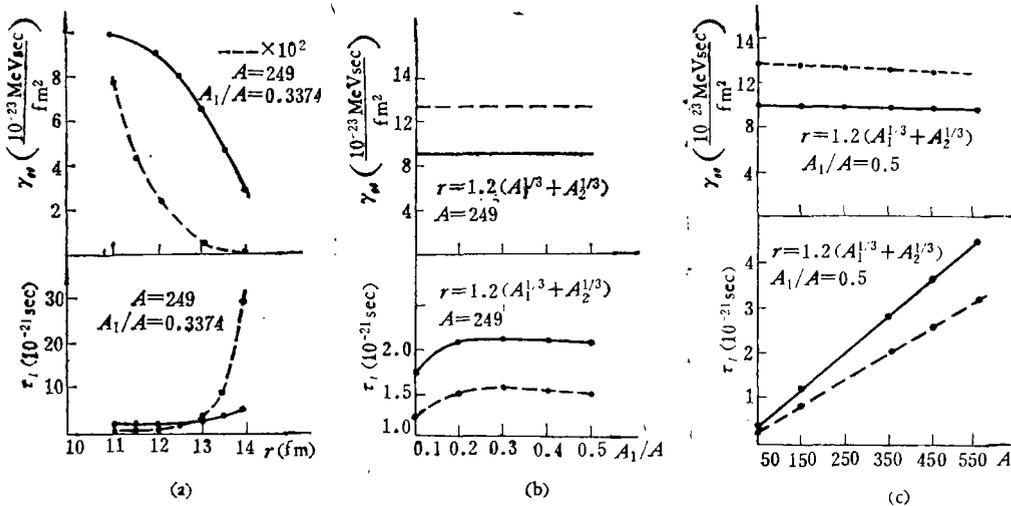


图2 切向摩擦系数与角动量弛豫时间,随碰撞核之间距离 r 、质量不对称自由度 A_1/A 以及系统总质量 A 的变化。(a)——与——线相应于摩擦系(23)式和(24)式。(b)——线的摩擦系数取 $\gamma_{rr}/\gamma_{\theta\theta} = 400/10$,——线取 $\gamma_{rr}/\gamma_{\theta\theta} = 120/14$ 。(c)摩擦系数的取法和(b)相同。

在关于 τ_l 的讨论中,我们还要强调的一点是,为了得到在 $A = 250$ 附近, τ_l 和纽伦伯格等^[22]大致相同的结果,需要变动格罗斯等^[7]给出的径向摩擦系数和切向摩擦系数的比例大小.计算中,为了得到径向动能弛豫时间 $\tau_R \approx \mu/2k_{rr} \approx 0.3 \times 10^{-21}$ sec^[22],取的比

例是 $\gamma_{rr}/\gamma_{\theta\theta} = 120/14 \approx 8.5/1$, 这同文献[14]发表的初步实验结果, 以及文献[15]计算的结果大体相符。

在摩擦系数和弛豫时间关系的讨论基础上, 我们用摩擦系数计算了角动量传输系数。计算在入射能量 $E_{c.M} = 465 \text{ MeV}$, $R_0 = 1.2(A_1^{1/3} + A_2^{1/3})$ 之下进行的。摩擦系数取费米函数形式 (23), 而摩擦系数的径向和切向之比取为 $\gamma_{rr}/\gamma_{\theta\theta} = 120/14$ 。图 3 给出计算的角动量漂移系数 v_M , 角动量扩散系数 D_{MM} , 随 M/M_{st} , A_1/A 以及 A 的变化。从图看出, 由 (25) 式和 (26) 式给出 D_{MM} 对于 l_i 的依赖关系是, D_{MM} 随着 l_i 的增加而减小, 而 v_M 对 l_i 的依赖关系, 主要由驱动势对 M 的导数 $\frac{\partial}{\partial M} U_{lM}(A_1/A)$ 所控制, 因此, v_M 随 l_i 增加

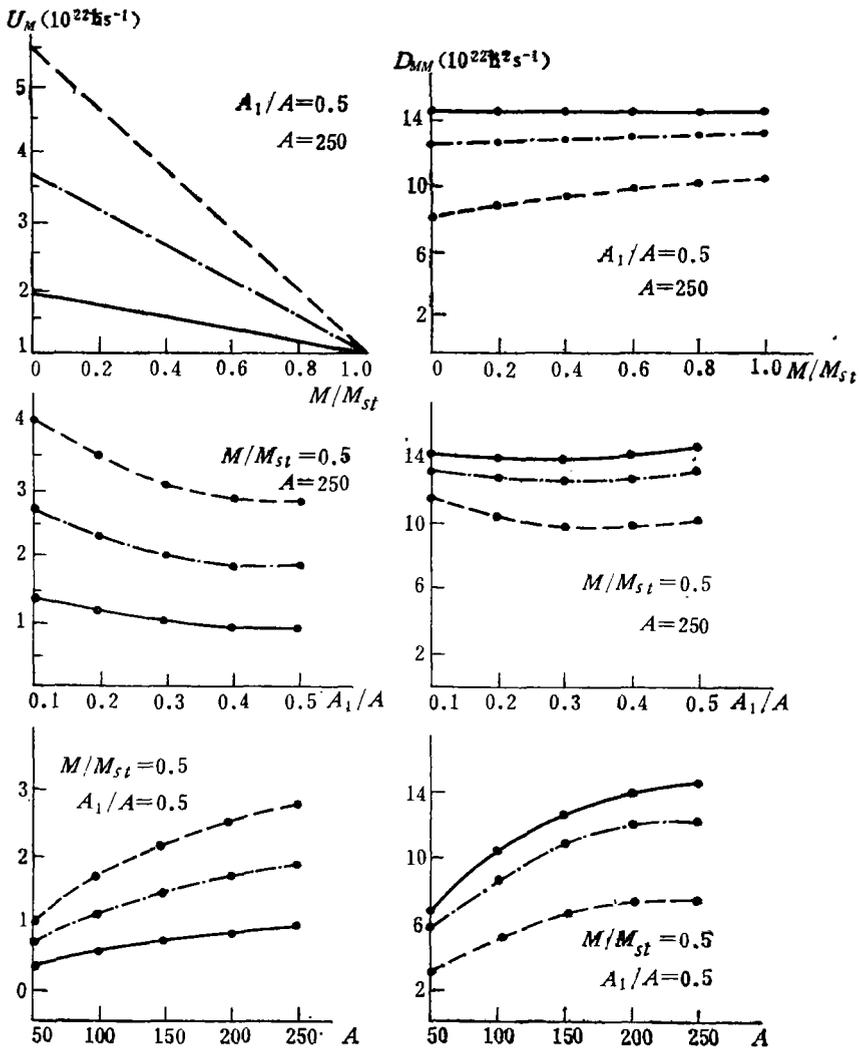


图 3 $l_i/l_{tr} = 0.25$ ——, 0.5 ---, 0.75 — 角动量漂移系数 v_M 与角动量扩散系数 D_{MM} , 随内禀角动量 M/M_{st} 、质量不对称自由度 A_1/A 以及总质量 A 的变化。所有图对于 $E_{c.M} = 465 \text{ MeV}$, $r = 1.2(A_1^{1/3} + A_2^{1/3})$ 计算。

而增加。漂移系数对于 M 的依赖关系,在不考虑 γ_{00} 与 $l(l)$ 相关的情况之下,是线性的,而扩散系数对 M 的依赖关系,差不多保持为常数。由于我们没有考虑碰撞核之间质量不对称自由度对 v_M 所产生的影响,因此,当取粘边极限 $M \rightarrow M_{st} = \frac{\mathcal{F}_{int}}{\mathcal{F}_{tot}} l_i$ 时,漂移系数

消失。对一定的 l_i , v_M 与 D_{MM} 对 A_1/A 的依赖比较弱,而 v_M 和 D_{MM} 却随 A 增加而增加。

这里,用摩擦系数计算的角动量传输系数,同纽伦伯格等^[10]的结果,除了 v_M 随 A_1/A 稍稍下降, D_{MM} 差不多不随 A_1/A 变化外,趋势完全相同。造成差别的原因,是我们取了相同的人射能量 $E_{c.m.}$,因而导致了每个核子不同的激发能,而在文献[10]中,取的是每个核子相同的激发能。由此看出,目前关于摩擦系数和传输系数的讨论,所得到的结果,是相互一致的。

表中,我们给出 $^{86}\text{Kr} + ^{166}\text{Er}$ 与 $^{136}\text{Xe} + ^{209}\text{Bi}$ 两个反应道,在相应两组不同入射能量下,所计算的弛豫时间及传输系数。由表看出,不同反应道的弛豫时间和传输系数是不同的,由于我们取的摩擦系数和角动量 l 是和激发能无关,所以弛豫时间相同,而传输系数则随入射能量增加而增加。

总起来说,动力学方程与扩散方程的关联,可以同时讨论深部非弹性碰撞中的耗散与统计涨落。某种物理过程耗散与涨落的讨论,必须要知道碰撞过程中的核接触时间,和这个物理过程的弛豫时间。由于摩擦系数对相互作用时间的计算产生决定性的影响,所以本文着重讨论了弛豫时间,以及摩擦系数与传输系数的关系,从而对摩擦系数作间接的检验。在这个基础上,将进一步讨论目前人们所注意的,深部非弹性碰撞中角动量耗散与能量耗散这两个重要问题。

表 1 对于不同的反应道,以及相应的人射能量,计算的弛豫时间与传输系数

反应道	E_{lab}/N (MeV)	τ_i ($10^{-21}s$)	$v_M(10^{22}\hbar s^{-1})$		$D_{MM}(10^{22}\hbar^2 s^{-1})$	
			$M/M_{st} = 0$	$M/M_{st} = 0.5$	$M/M_{st} = 0$	$M/M_{st} = 0.5$
$^{86}\text{Kr} + ^{166}\text{Er}$	8.18	1.52	3.9	1.95	14.2	14.0
	5.99	1.52	2.9	1.45	11.2	11.0
$^{136}\text{Xe} + ^{209}\text{Bi}$	8.36	2.04	4.4	2.2	17.8	18.7
	6.62	2.04	4.4	1.7	14.8	14.6

参 考 文 献

- [1] A. G. Artukh et al., *Nucl. Phys.*, **A215**(1973), 91.
- [2] J. Galin, *J. Phys.*, **C5**, 37(1976), 83.
- [3] L. G. Moretto and R. Schmitt, *J. Phys.*, **C5**, 37(1976), 109.
- [4] 中国科学院近代物理研究所, 科学技术报告汇编, 第二集(1976), 51.
- [5] 吴国华、钟纪泉、葛凌霄, 高能物理与核物理, **1**(1977), 83.
- [6] 葛凌霄、吴国华、刘建业, 高能物理与核物理, **3**(1979), 760.
- [7] D. E. H. Gross et al., *Phys. Lett.*, **48B**(1974), 302.
- [8] J. Bondorf et al., *Phys. Report*, **15C**(1974), 83.
- [9] G. Wolschin and W. Nörenberg, *Phys. Rev. Lett.*, **41**(1978), 691.
- [10] S. Ayik, G. Wolschin and W. Nörenberg, *Z. Phys.*, **A286**(1978), 271.
- [11] D. E. H. Gross and H. Kalinowski, *Phys. Report*, **45C**(1978), 177.
- [12] G. Wolschin and W. Nörenberg, *Z. Phys.*, **A284**(1978), 209.

- [13] E. Seglie et al., *Phys. Rev.*, C11(1975), 1227.
[14] P. Dyer et al., *Phys. Rev. Lett.*, 38(1977), 392.
[15] 徐树威, 高能物理与核物理, 3(1979), 769.

A CORRELATIVE TREATMENT OF DYNAMICS AND DIFFUSION EQUATIONS IN DEEP INELASTIC COLLISIONS

ZHONG JI-QUAN

(*Institute of Modern Physics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

It is possible to determine the relaxation time and transport coefficients from the friction coefficients based on the correlation between the dynamics and diffusion equations. The calculations of the relaxation time of angular momentum and the angular momentum transport coefficients indicate that, such a method is convenient for discussing the dissipation and statistic fluctuation in heavy-ion collisions.