第4卷 第4期
1980年7月
高能物理与核物理
PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS
Vol. 4, No. 4
July, 1980

原子核四极振动声子的波函数

孙 洪 洲
(北 京 大 学)

摘 要

应用声子产生与湮没算符的对易性质，讨论了四极振动声子的波函数的分类问题．从而避开了许多关于群表示论的专门知识．在本文中给出了按群链 $U_5\supset R_5\supset SU_2\otimes SU_2'$ 分类的声子波函数的明显表达式，以及这些波函数间的一些重要关系．对于按群链 $U_5\supset R_5\supset R_3$ 分类的波函数，给出了一个系统地规定其附加指标的方法，并给出了按群链 $U_5\supset R_5\supset R_3$ 分类的波函数的一般表达式．

在本文中还推导出了辛弱数 P 确定时声子总角动量的可取值与重复度的一般公式，并给出了 $p\leqslant 30$ 时声子总角动量的可取值及重复度的数值表．

前 言

原子核形状四极振动具有很强的非简谐性，在分析这些非简谐效应时，往往涉及声子数很多的态．

如所周知，对于声子数多的态，相应于 $U_5\supset R_5\supset R_3$ 分类的量子数 n, P, I, M 是不完备的，其中 n 是声子数，P 是辛弱数，I, M 是总角动量及其 Z 分量量子数．需要引入附加量子数．

我们可以从任一组完备的基矢出发，通过适当的线性组合来找到物理上需要的量子数，并确定附加的量子数．例如可以从 $n_{-2}, n_{-1}, n_0, n_1, n_2$ 所确定的基矢出发（n_μ，是角动量 Z 分量为 μ 的声子数）；这组基矢有确定的 n 和 M，但没有确定的 P 和 I．我们也可以从 Hecht[2] 所引入的“数学基”出发，它是按照 $U_5\supset R_5\supset SU_2\otimes SU_2$ 分类的基矢．在数学基中 n, P, M 都有确定值，但 I 不具有确定值．以下，我们将按照 [2] 中的说法，称具有确定的 n, P, I, M 的基矢为物理基．

无论从那一种基矢出发，都可以通过直接计算来确定在一组 n, P, I 下独立态的数目 S，并确定附加量子数． Weber[4] 给出了一个计算 S 的递推公式，并且给出了 $n\leqslant 9$ 时 S 的数值表，William[5] 给出了一个标记这些独立态的附加量子数（类似于本文中的 Δ）及总角动量量子数可取值的规则．William 给出的附加量子数是通过在 $U_5\supset R_5\supset SU_2\otimes SU_2$ 分类中的波函数经过 Wheeler 积分来引入的，其物理意义不如我们引入的 Δ 的明显，并且 William 也没有给出具有一定附加量子数波函数的一般表达式．

本文1978年7月24日收到．

在本文中，我们利用 $U_5 \supset R_5 \supset SU_2 \otimes SU_2$ 分类的波函数来解决这个问题. 在讨论中只用到了声子产生与湮没算符的对易性质，从而避免了有关群论的专门知识，所得的结果的物理意义也更为明显了.

在第一、二节中，我们首先把对数学基的讨论加以简化，给出了它的明显表达式，并导出了它们之间的一些重要关系. 在第三节中讨论了从数学基到物理基之间的么正变换及在 R_5 群的 $(0P)$ 不可约表示下 I 的可取值与其重复度问题. 在本文最后，给出了在 $(0P)$ 不可约表示下 I 的可取值及其重复度的一个明显表达式，同时也给出了么正变换矩阵的表达式.

一、声子波函数的数学基

n 个角动量为 2 的声子的波函数可以用群链 $U_5 \supset R_5 \supset R_3$ 来分类，相应的波函数为

$$|[n](0P)\Delta IM\rangle. \tag{1.1}$$

其中 n 是声子数，P 是辛弱数，I，M 是总角动量及其 Z 分量量子数，Δ是附加量子数.

用 $\bar{a}_\mu$, $a_\mu(\mu = -2, -1, 0, 1, 2)$ 表示角动量为 2，其 Z 分量为 μ 的声子的产生与湮没算符，它们满足

$$[a_\mu \bar{a}_\nu] = \delta(\mu\nu). \tag{1.2}$$

U_5 群的无穷小算子可以写为[1]

$$U_q^k = \sum_{\mu\nu} \langle kq2\nu|2\mu\rangle \bar{a}_\mu a_\nu,$$

$$k = 0, 1, 2, 3, 4; \quad q = k, -(k-1), \cdots, -k; \tag{1.3}$$

其中 $\langle kq2\nu|2\mu\rangle$ 是 CG 系数.

子群 R_5 的无穷小算子为[1]

$$U_q^k; \quad k = 1, 3; \quad q = k, \cdots, -k. \tag{1.4}$$

R_5 的 Casimir 算子为

$$C = -\frac{1}{5}\{3\sqrt{3}\,(U^1U^1)_0 + 7\sqrt{7}\,(U^3 \cdot U^3)_0\}, \tag{1.5}$$

其中

$$(U^rU^r)_0 = \sum_q \langle rqr-q|00\rangle U_q^r U_{-q}^r, \quad r = 1.3, \tag{1.5'}$$

子群 R_3 的无穷小算子为[1]

$$U_q^1; \quad q = 1, 0, -1. \tag{1.6}$$

实际上，U_q^1 与角动量算符 L_q 之间有关系[1]

$$L_q = -\sqrt{6}\,U_q^1. \tag{1.6'}$$

用群链 $U_5 \supset R_5 \supset R_3$ 分类的波函数是 $N = \sum_\mu \bar{a}_\mu a_\mu$, C, L^2, L_0 的共同本征函数，相应的本征值是 n, $\frac{1}{2}P(P+3)$, $I(I+1)$, M. 当 n 较大时，量子数，n, P, I, M 确定后，波函数并未完全确定，需要引入附加量子数 Δ.

为了系统地标记波函数，可以引入另一个群链 $U_5 \supset R_5 \supset SU_2 \otimes SU_2$ 来分类声子的波函

数. 引入算符

$$\nu_0 = \frac{1}{2}\{\bar{a}_2a_2 + \bar{a}_1a_1 - \bar{a}_{-2}a_{-2} - \bar{a}_{-1}a_{-1}\},$$

$$\nu_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}\{\bar{a}_2a_{-1} + \bar{a}_1a_{-2}\}, \quad \nu_{-1} = -\sqrt{\frac{1}{2}}\{\bar{a}_{-1}a_2 + \bar{a}_{-2}a_1\}; \tag{1.7}$$

$$\tau_0 = \frac{1}{2}\{\bar{a}_2a_2 - \bar{a}_1a_1 - \bar{a}_{-2}a_{-2} + \bar{a}_{-1}a_{-1}\},$$

$$\tau_1 = -\sqrt{\frac{1}{2}}\{\bar{a}_2a_1 + \bar{a}_{-1}a_{-2}\}, \quad \tau_{-1} = \sqrt{\frac{1}{2}}\{\bar{a}_1a_2 + \bar{a}_{-2}a_{-1}\}; \tag{1.8}$$

$$T_{1/2\,1/2} = \sqrt{\frac{1}{2}}\{\bar{a}_2a_0 - \bar{a}_0a_{-2}\}, \quad T_{1/2\,-1/2} = \sqrt{\frac{1}{2}}\{\bar{a}_1a_0 + \bar{a}_0a_{-1}\},$$

$$T_{-1/2\,1/2} = -\sqrt{\frac{1}{2}}\{\bar{a}_0a_1 + \bar{a}_{-1}a_0\}, \quad T_{-1/2-1/2} = \sqrt{\frac{1}{2}}\{\bar{a}_0a_2 - \bar{a}_{-2}a_0\}. \tag{1.9}$$

$\nu_0, \nu_{\pm1}; \tau_0, \tau_{\pm1}, T_{rs}(r = \pm1/2, s = \pm1/2)$ 是 R_5 的另一组无穷小算子，容易看出: ν_0, $\nu_{\pm1}$; $\tau_0, \tau_{\pm1}$ 是两组相互对易的“角动量”算符，T_{rs} 是一个秩为 1/2, 1/2 的不可约张量算符,即:

$$[\nu_0, \nu_{\pm1}] = \pm\nu_{\pm1}, \quad [\nu_1, \nu_{-1}] = -\nu_0; \tag{1.10}$$

$$[\tau_0, \tau_{\pm1}] = \pm\tau_{\pm1}, \quad [\tau_1, \tau_{-1}] = -\tau_0; \tag{1.11}$$

$$[\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu}] = 0; \tag{1.12}$$

$$[\nu_0, T_{rs}] = rT_{rs}, \quad [\tau_0, T_{rs}] = sT_{rs},$$

$$[\nu_{\pm1}, T_{rs}] = \mp\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\mp r\right)\left(\frac{1}{2}\pm r + 1\right)}\,T_{r\pm1s},$$

$$[\tau_{\pm1}, T_{rs}] = \mp\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\mp s\right)\left(\frac{1}{2}\pm s + 1\right)}\,T_{rs\pm1}; \tag{1.13}$$

$$[T_{\pm1/2\,1/2}, T_{\pm1/2\,-1/2}] = \sqrt{\frac{1}{2}}\,\nu_{\pm1}, \quad [T_{1/2\,\pm1/2}, T_{-1/2\,\pm1/2}] = \sqrt{\frac{1}{2}}\,\tau_{\pm1},$$

$$[T_{\pm1/2\,1/2}, T_{\mp1/2\,-1/2}] = \frac{1}{2}(\nu_0 \pm \tau_0). \tag{1.14}$$

对易关系 (1.14) 说明了 R_5 群包含了子群 $SU_2\otimes SU_2$. 这样，我们就找到了群链 $U_5\supset R_5\supset SU_2\otimes SU_2$. 容易看出

$$L_0 = 3\nu_0 + \tau_0, \quad L_{\pm1} = 2\tau_{\pm1} - \sqrt{2}\,T_{\pm1/2\,\mp1/2}, \tag{1.15}$$

及

$$C = \boldsymbol{\nu}^2 + \boldsymbol{\tau}^2 + 2(T\cdot T)_0. \tag{1.16}$$

其中

$$(T\cdot T)_0 = \{T_{-1/2\,-1/2}T_{1/2\,1/2} - T_{-1/2\,1/2}T_{1/2\,-1/2}\} + \frac{1}{2}\nu_0$$

$$= \{T_{-1/2\,-1/2}T_{1/2\,1/2} - T_{1/2\,-1/2}T_{-1/2\,1/2}\} + \frac{1}{2}\tau_0. \tag{1.17}$$

用群链 $U_5 \supset R_5 \supset SU_2 \otimes SU_2$ 分类的声子的波函数是 N; C; $\nu^2, \nu_0, \tau^2, \tau_0$ 的共同本征函数[1]。为了给出其明显表达式，引算符号

$$\bar{\alpha}_0 = \bar{a}_0, \quad \bar{\beta}_0 = \bar{a}_1\bar{a}_{-1} - \bar{a}_2\bar{a}_{-2}. \tag{1.18}$$

显然，算符

$$\bar{S} = \bar{\alpha}_0^2 - 2\bar{\beta}_0 = \sqrt{5} \sum_{\mu} \langle 2\mu 2 - \mu | 00 \rangle \bar{a}_\mu \bar{a}_{-\mu} \tag{1.19}$$

是产生两个配对声子的算符．可以看出 $\bar{S}$ 是 R_5 群的一个不变量，而且有

$$[S, \bar{S}] = 2(2N + 5), \tag{1.19'}$$

利用算符 $S, \bar{S}, R_5$ 的 Casimir 算子 C 又可以写为

$$C = \frac{1}{2}\{N(N + 3) - \bar{S}S\}. \tag{1.16'}$$

在 n 个声子的波函数中，可以找到一个最高权态

$$\left| [n]\, P \begin{matrix} P \\ 0 \\ P \end{matrix} \right\rangle = D(nP)\bar{S}^s \left\langle P \begin{matrix} P \\ 0 \\ P \end{matrix} \right\rangle |0\rangle, \tag{1.20}$$

其中 $\left\langle P \begin{matrix} P \\ 0 \\ P \end{matrix} \right\rangle = \sqrt{\frac{1}{P!}}(\bar{a}_2)^P, \quad s = \frac{1}{2}(n - P),$

$$D(nP) = \sqrt{\frac{(2P-4)!\left[\frac{1}{2}(n+P+4)\right]!}{(P+2)!(n+P+4)!\left[\frac{1}{2}(n-P)\right]!}}. \tag{1.21}$$

P 是不成对的声子数，s 是配对声子的对数，$D(nP)$ 是归一化常数．

容易证明最高权态满足方程

$$\begin{pmatrix} N \\ \nu_0 \\ \tau_0 \end{pmatrix} \left| [n]\, P \begin{matrix} P \\ 0 \\ P \end{matrix} \right\rangle = \begin{pmatrix} n \\ P/2 \\ P/2 \end{pmatrix} \left| [n]\, P \begin{matrix} P \\ 0 \\ P \end{matrix} \right\rangle, \tag{1.22}$$

而 $\nu_1, \tau_1, T_{1/2\,1/2}, T_{1/2\,-1/2}, T_{-1/2\,1/2}$ 作用到最高权态上为 0．

这样，即可看出：最高权态是 N, C; ν^2, ν_0; τ^2, τ_0 的共同本征函数，相应的本征值是 $n, \frac{1}{2}P(P+3)$; $\frac{P}{2}\left(\frac{P}{2}+1\right), \frac{P}{2}$; $\frac{P}{2}\left(\frac{P}{2}+1\right), \frac{P}{2}$.

最高权态确定后，应用对易关系 (1.10—1.14) 即可得到 N; C; ν^2, ν_0; τ^2, τ_0 的所有本征函数[2]．

$$\left| [n]\, P \begin{matrix} c \\ b \\ e \end{matrix} \right\rangle = D(nP)C(Pb)\bar{S}^s F_{Pb} \left\langle P - b \begin{matrix} P-b \\ 0 \\ P-b \end{matrix} \right\rangle |0\rangle$$

$$b = 0, 1, 2, \cdots, P, \quad c = b, b+1, \cdots, P, \quad e = b, b+1, \cdots, P, \tag{1.23}$$

其中

1) 可以证明 $\nu^2 = \tau^2$

2) 这里利用 Gel'fand 关于角动量本征函数的标记法：

$$|\Lambda K\rangle = \left| \begin{matrix} a \quad b \\ c \end{matrix} \right\rangle, \ \Lambda = \frac{1}{2}(a - b), \quad a \geqslant b, \quad K = c - \frac{1}{2}(a + b), \quad c = b, b+1, \cdots, a.$$

$$F_{Pb}=\sum_{r=0}\frac{P!\,b!}{2^r(P+1+r-b)!\,r!\,(b-2r)!}\bar{\alpha}_0^{b-2r}\bar{\beta}_0^r,$$

$$C(Pb)=(-)^b\sqrt{\frac{2^{b-1}(P+1-b)!\,(2P+2-b)!}{P!\,b!\,(2P+1)!}},$$

$$\left\langle \begin{matrix} & c & \\ P & & 0 \\ & e & \end{matrix}\right\rangle=\left\{\binom{P}{c}\binom{P}{e}\right\}^{-1/2}\sum_{r=0}\frac{\sqrt{P}\,\bar{a}_2^{c+e+r-P}\bar{a}_{-2}^{r}\bar{a}_1^{P-e-r}\bar{a}_{-1}^{P-c-e}}{(c+e+r-P)!\,r!\,(P-e-r)!\,(P-c-e)!}. \tag{1.23'}$$

波函数 (1.23) 满足的方程是

$$\begin{pmatrix} N \\ C \\ \tau^2 \\ \tau_0 \\ \nu^2 \\ \nu_0 \end{pmatrix}\left|[n]\, \begin{matrix} & c & \\ P & & b \\ & e & \end{matrix}\right\rangle=\begin{pmatrix} n \\ P(P+3)/2 \\ \Lambda \\ \varepsilon \\ \Lambda \\ K \end{pmatrix}\left|[n]\, \begin{matrix} & c & \\ P & & b \\ & e & \end{matrix}\right\rangle, \tag{1.24}$$

其中

$$\Lambda=\frac{1}{2}(P-b),\quad \varepsilon=c-\frac{1}{2}(P+b),\quad K=e-\frac{1}{2}(P+b). \tag{1.24'}$$

这样，我们就得到了按群链 $U_5\supset R_5\supset SU_2\otimes SU_2$ 分类的波函数的明显表达式 (1.23)。称波函数 (1.23) 为声子波函数的数学基。

在数学基下，算符 $\nu_{\pm1}$, $\tau_{\pm1}$, $T_{rs}(r=\pm1/2,\ s=\pm1/2)$ 的矩阵元为

$$\left\langle [n]\, \begin{matrix} & c' & \\ P & & b' \\ & e' & \end{matrix}\right|\tau_{\pm1}\left|[n]\, \begin{matrix} & c & \\ P & & b \\ & e & \end{matrix}\right\rangle=\mp\sqrt{\frac{1}{2}(\Lambda\mp\varepsilon)(\Lambda\pm\varepsilon+1)}$$

$$\delta(b'b)\delta cc'(\pm1)\delta(e'e),$$

$$\left\langle [n]\, \begin{matrix} & c' & \\ P & & b' \\ & e' & \end{matrix}\right|\nu_{\pm1}\left|[n]\, \begin{matrix} & c & \\ P & & b \\ & e & \end{matrix}\right\rangle=\mp\sqrt{\frac{1}{2}(\Lambda\mp K)(\Lambda\pm K+1)}$$

$$\delta(b'b)\delta(c'c)\delta(e'e\pm1),$$

$$\left\langle [n]\, \begin{matrix} & c' & \\ P & & b' \\ & e' & \end{matrix}\right|T_{rs}\left|[n]\, \begin{matrix} & c & \\ P & & b \\ & e & \end{matrix}\right\rangle=\langle Pb'\|T\|Pb\rangle/(P+1-b)$$

$$\left\langle \Lambda\varepsilon\,\frac{1}{2}\,r\,|\,\Lambda'\varepsilon'\right\rangle\left\langle \Lambda K\,\frac{1}{2}\,s\,|\,\Lambda'K'\right\rangle. \tag{1.25}$$

其中 $\langle Pb'\|T\|Pb\rangle$ 是 T_{rs} 的约化矩阵元，将函数 (1.23) 代入上式，即可得到[1)]

$$\langle Pb+1\|T\|Pb\rangle=\frac{1}{2}\sqrt{(b+1)(P-b)(P+1-b)(2P+2-b)},$$

$$\langle Pb-1\|T\|Pb\rangle=\frac{1}{2}\sqrt{b(P+1-b)(P+2-b)(2P+3-b)}, \tag{1.25'}$$

其他的 $\langle Pb'\|T\|Pb\rangle$ 为 0．在本节最后，我们给出 F_{Pb} 的几个邻次关系，在具体计算中它们是很有用的

1）这个数值也可以从讨论 C_2 群的性质得到．

$$(P+1)(2P+3)\bar{\alpha}_0 F_{Pb} = (2P+5-b)F_{P+1\ b+1} + P(P+1)b(\bar{\alpha}_0^2 - 2\bar{\beta}_0)F_{P-1\ b-1},$$
$$2(P+1)(2P+3)F_{Pb} = (2P+3-b)(2P+4-b)F_{P+1\ b}$$
$$- P(P+1)b(b-1)(\bar{\alpha}_0^2 - 2\bar{\beta}_0)F_{P-1\ b-2},$$
$$(P+1)(2P+3)\bar{\beta}_0 F_{Pb} = F_{P+1\ b+2} - P(P+1)(\bar{\alpha}_0^2 - 2\bar{\beta}_0)F_{P-1\ b}. \tag{1.26}$$

二、在数学基下算符 $\bar{a}_\mu$ 的矩阵元

算符 $\bar{a}_\mu$ 是 U_5 群的 [1] 秩不可约张量，同时又是 R_5 群的 (01) 秩不可约张量，它可以改写为

$$\bar{a}_2 = \bar{a}\begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & 0 \\ & 1 & \end{pmatrix},\ \bar{a}_{-1} = \bar{a}\begin{pmatrix} & 0 & \\ 1 & & 0 \\ & 1 & \end{pmatrix},\ \bar{a}_1 = \bar{a}\begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & 0 \\ & 0 & \end{pmatrix},\ \bar{a}_{-2} = \bar{a}\begin{pmatrix} & 0 & \\ 1 & & 0 \\ & 0 & \end{pmatrix},\ \bar{a}_0 = \bar{a}\begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

应用推广的 Wigner-Eckart 定理，有

$$\left\langle [n+1]\,P_3 \begin{matrix} c_3 \\ b_3 \\ e_3 \end{matrix} \right| \bar{a}\begin{pmatrix} & c_2 & \\ 1 & & b_2 \\ & e_2 & \end{pmatrix} \left| [n]\,P_1 \begin{matrix} c_1 \\ b_1 \\ e_1 \end{matrix} \right\rangle = \langle [n+1] \| \bar{a} \| [n] \rangle$$
$$\cdot \langle [n+1]P_3 | [n]P_1[1]1 \rangle \langle P_3 b_3 | P_1 b_1 1 b_2 \rangle \langle \Lambda_1 \varepsilon_1 \Lambda E_2 | \Lambda_3 \varepsilon_3 \rangle \langle \Lambda_1 K_1 \Lambda_2 K_2 | \Lambda_3 K_3 \rangle, \tag{2.2}$$

其中 $\langle P_3 b_3 | P_1 b_1 1 b_2 \rangle \equiv \langle (0P_3)\Lambda_3\Lambda_3 | (0P_1)\Lambda_1\Lambda_1(01)\Lambda_2\Lambda_2 \rangle$ 是 $R_5 \supset SU_2 \otimes SU_2$ 约化系数标量因子．而 $\langle [n+1]P_3 | [n]P_1[1]1 \rangle \equiv \langle [n+1](0P_3) | [n](0P_1)[1](01) \rangle$ 可以称为 $U_5 \supset R_5$ 约化系数标量因子，它满足归一化条件 $\sum\limits_{P_2} |\langle [n+1]P_3 | [n]P_2[1]1 \rangle|^2 = 1$．因子 $\langle [n+1] \| \bar{a} \| [n] \rangle$ 可以称为算符的 $U_5 \subset R_5$ 约化矩阵元．利用上节结果即可以直接证明 (2.2) 式，并给出 (2.2) 式中几个因子的数值（这几个因子的数值通常是应用群表示论求出的）．

(2.2) 式可以改写为（取 $c_3 = e_3 = P_3$）

$$\left\langle [n+1]\,P_3 \begin{matrix} P_3 \\ b_3 \\ P_3 \end{matrix} \right| \{\bar{a}(1b_2) | [n]P_1 b_1 \rangle\}_{P_3 - b_3}$$
$$= \langle [n+1] \| \bar{a} \| [n] \rangle \langle [n+1]P_3 | [n]P_1[1]1 \rangle \langle P_3 b_3 | P_1 b_1 1 b_2 \rangle, \tag{2.2'}$$

其中

$$\{\bar{a}(1b_2) | [n]P_1 b_1 \rangle\}_{P_3 - b_3}$$
$$= \sum_{\substack{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \\ K_1 K_2}} \langle \Lambda_1 \varepsilon_1 \Lambda_2 \varepsilon_2 | \Lambda_3 \Lambda_3 \rangle \langle \Lambda_1 K_1 \Lambda_2 K_2 | \Lambda_3 \Lambda_3 \rangle \bar{a}\begin{pmatrix} & c_2 & \\ 1 & & b_2 \\ & e_2 & \end{pmatrix} \left| [n]\,P_1 \begin{matrix} c_1 \\ b_1 \\ e_1 \end{matrix} \right\rangle. \tag{2.2''}$$

利用上一节中的结果，可得

$$\{\bar{a}(11) | [n]P\, b-1 \rangle\}_{P+1-b}$$
$$= \frac{D(nP)C(P\ b-1)(2P+4-b)}{D(n+1\ P+1)C(P+1\ b)(P+1)(2P+3)} \left| [n+1]\,P+1 \begin{matrix} P+1 \\ b \\ P+1 \end{matrix} \right\rangle$$
$$+ \frac{D(nP)C(P\ b-1)P(b-1)}{D(n+1\ P-1)C(P-1\ b-2)(2P+3)} \left| [n+1]\,P-1 \begin{matrix} P-1 \\ b-2 \\ P-1 \end{matrix} \right\rangle, \tag{2.3}$$

$$\{\bar{a}(10)|[n]Pb\rangle\}_{P+1-b}=\frac{D(nP)C(Pb)(2P+3-b)(2P+4-b)}{D(n+1\ P+1)C(P+1\ b)(2P+2)(2P+3)}$$

$$\cdot\sqrt{P+1-b}\left|[n+1]\,P+1\begin{matrix}P+1\\ \\P+1\end{matrix}b\right\rangle-\frac{D(nP)C(Pb)Pb(b-1)}{2D(n+1\ P-1)C(P-1\ b-2)(2P+3)}$$

$$\cdot\sqrt{P+1-b}\left|[n+1]\,P-1\begin{matrix}P-1\\ \\P-1\end{matrix}b-2\right\rangle,\tag{2.4}$$

$$\{\bar{a}(10)|[n]P\ b-2\rangle\}_{P+1-b}$$

$$=-\frac{D(nP)C(P\ b-2)}{D(n+1\ P+1)C(P+1\ b)(P+1)(2P+3)}\frac{1}{\sqrt{P+2-b}}$$

$$\cdot\left|[n+1]\,P+1\begin{matrix}P+1\\ \\P+1\end{matrix}b\right\rangle+\frac{D(nP)C(P\ b-2)P}{D(n+1\ P-1)C(P-1\ b-2)(2P+3)}$$

$$\cdot\frac{1}{\sqrt{P+2-b}}\left|[n+1]\,P-1\begin{matrix}P-1\\ \\P-1\end{matrix}b-2\right\rangle.\tag{2.5}$$

将(2.3)、(2.4)、(2.5)代入(2.2′)即可得到公式(2.2). 具体计算出的系数的表达式如下

$$\langle[n+1]\,|||\bar{a}|||\,[n]\rangle=\sqrt{n+1};\tag{2.6}$$

$$\langle[n+1]P+1|[n]P[1]1\rangle=\sqrt{\frac{(n+P+5)(P+1)}{(n+1)(2P+5)}},$$

$$\langle[n+1]P-1|[n]P[1]1\rangle=\sqrt{\frac{(n-P+2)(P+2)}{(n+1)(2P+1)}};\tag{2.7}$$

$$\langle P+1\ b|Pb10\rangle=\sqrt{\frac{(P+1-b)(2P+3-b)(2P+4-b)}{2(P+1)(2P+3)(P+2-b)}},$$

$$\langle P+1\ b|P\ b-2\ 10\rangle=-\sqrt{\frac{(P+3-b)b(b-1)}{2(P+1)(2P+3)(P+2-b)}},$$

$$\langle P+1\ b|P\ b-1\ 11\rangle=\sqrt{\frac{(2P+4-b)b}{(P+1)(2P+3)}};$$

$$\langle P-1\ b-2|Pb\ 10\rangle=-\sqrt{\frac{(P+1-b)b(b-1)}{2(P+2)(2P+3)(P+2-b)}},$$

$$\langle P-1\ b-2|P\ b-2\ 10\rangle=\sqrt{\frac{(P+3-b)(2P+3-b)(2P+4-b)}{2(P+2)(2P+3)(P+2-b)}},$$

$$\langle P-1\ b-2|P\ b-1\ 11\rangle=\sqrt{\frac{(b-1)(2P+3-b)}{(P+2)(2P+3)}}.\tag{2.8}$$

利用(2.8)可直接验明

$$\langle P-1\ b|Pb_1 1b_2\rangle=\frac{P+1-b_1}{P-b}\sqrt{\frac{P(2P+1)}{(2P+2)(2P+3)}}\langle Pb_1|P-1\ b,1b_1\rangle,\tag{2.9}$$

引入符号

$$\langle[n+1]P_3b_3\|\bar{a}(1b_2)\|[n]P_1b_1\rangle \equiv (P_3+1-b_3)\langle[n+1]\,|||\bar{a}|||\,[n]\rangle\cdot \langle[n+1]P_3|[n]P_1[1]1\rangle\langle P_3b_3|P_1b_11b_2\rangle, \tag{2.10}$$

即

$$\left\langle[n+1]\,\overset{c_3}{\underset{e_3}{P_3\;\;b_3}}\right|\bar{a}\left(\overset{c_2}{\underset{e_2}{1\;\;b_2}}\right)\left|[n]\,\overset{c_1}{\underset{e_1}{P_1\;\;b_1}}\right\rangle = \frac{\langle[n+1]P_3b_3\|\bar{a}(1b_2)\|[n]P_1b_1\rangle}{2\Lambda_3+1}\langle\Lambda_1\epsilon_1\Lambda_2\epsilon_2|\Lambda_3\epsilon_3\rangle\langle\Lambda_1K_1\Lambda_2K_2|\Lambda_3K_3\rangle. \tag{2.10'}$$

利用 (2.6)、(2.7) 和 (2.9) 可得

$$\langle[n+1]\,P+1\;b_3\|\bar{a}(1b_2)|[n]Pb_1\rangle = \sqrt{\frac{n+P+5}{2P+5}}\langle[P+1]\,P+1\;\;b_3\|\bar{a}(1b_2)\|[P]Pb_1\rangle,$$

$$\langle[n+1]\;P-1\;\;b_3\|\bar{a}(1b_2)\|[n]Pb_1\rangle = \sqrt{\frac{n-P+2}{2P+3}}\langle[P]Pb_1\|\bar{a}(1b_2)\|[P-1]\;\;P-1\;\;b\rangle. \tag{2.11}$$

三、几个声子波函数的物理基

在前面两节中我们讨论了 n 个声子的波函数的数学基 $\left|[n]\;\overset{c}{\underset{e}{P\;b}}\right\rangle$ 的性质，它们不是总角动量的本征函数．在实际计算中应用总角动量的本征函数是方便的，即需要用群链 $U_5\supset R_5\supset R_3$ 分类的 n 个声子的波函数 $|[n](0P)\Delta IM\rangle$（n 个声子波函数的物理基）．为此，我们通过么正变换从数学基过渡到物理基．

$$|[n](0P)\Delta IM\rangle = \sum_{bce}\left|[n]\;\overset{c}{\underset{e}{P\;b}}\right\rangle\left\langle\overset{c}{\underset{e}{P\;b}}\;|\Delta IM\right\rangle, \tag{3.1}$$

从 (1.17) 式知道 $L_0 = 3\nu_0 + \tau_0$，所以只有当

$$3c + e - 2(P-b) = M \tag{3.1'}$$

时，么正矩阵元 $\left\langle\overset{c}{\underset{e}{P\;b}}\;|\Delta IM\right\rangle$ 才不为 0．这样，当 $M = 2P-\xi$ 时（ξ 非负整数）在 (3.1) 式右边能够出现的波函数是

$$\left|[n]\;\overset{P-i}{\underset{e}{P\quad\;\;b}}\right\rangle,\quad e = (P-\xi) + 3i + 2b, \tag{3.2}$$

其中，b，i 可以取满足以下条件的非负整数：

$$0 \leqslant b \leqslant \frac{\xi}{2},\quad P - P - b \leqslant 3i \leqslant \xi - 2b. \tag{3.2'}$$

分别用 $i_{\min}$，$i_{\max}$ 表示满足 (3.2′) 式的 i 的最小、最大值．于是有

$i_{\min} = 0$，当 $\xi \leqslant \varphi$ 时；$i_{\min}$ 可用下表给出，当 $\xi - P > 0$ 时．

b \ $\xi-P$	$3\varepsilon+1$	$3\varepsilon+2$	$3\varepsilon+3$
3β	$\varepsilon+1-\beta$	$\varepsilon+1-\beta$	$\varepsilon+1-\beta$
$3\beta+1$	$\varepsilon-\beta$	$\varepsilon+1-\beta$	$\varepsilon+1-\beta$
$3\beta+2$	$\varepsilon-\beta$	$\varepsilon-\beta$	$\varepsilon+1-\beta$

$i_{\max}$ 可用下表给出

b \ ξ	6δ	$6\delta+1$	$6\delta+2$	$6\delta+3$	$6\delta+4$	$6\delta+5$
3β	$2(\delta-\beta)$	$2(\delta-\beta)$	$2(\delta-\beta)$	$2(\delta-\beta)+1$	$2(\delta-\beta)+1$	$2(\delta-\beta)+1$
$3\beta+1$	$2(\delta-\beta)-1$	$2(\delta-\beta)-1$	$2(\delta-\beta)$	$2(\delta-\beta)$	$2(\delta-\beta)$	$2(\delta-\beta)+1$
$3\beta+2$	$2(\delta-\beta)-2$	$2(\delta-\beta)-1$	$2(\delta-\beta)-1$	$2(\delta-\beta)-1$	$2(\delta-\beta)$	$2(\delta-\beta)$

其中 $\varepsilon, \delta, \beta$ 都是非负整数. 令 $A_\xi = \sum\limits_b (i_{\max}(b\xi) - i_{\min}(b\xi) + 1)$, 于是 $A_\xi = \{M = 2P - \xi$ 的波函数的个数$\}, = \{I \geqslant 2P - \xi$ 的波函数的个数$\}$, 于是有 $S_\xi = A_\xi - A_{\xi-1} = \{$在 $(0P)$ 中角动量 $I = 2P - \xi$ 的波函数的个数$\}$.

把上面给出的 $i_{\min}, i_{\max}$ 代入上式,即可得到

$$\begin{aligned} S_\xi &= S_\xi^{(0)}, \quad \text{当 } \xi \leqslant P \text{ 时;} \\ &= S_\xi^{(0)} - S_\xi^{(1)}, \quad \text{当 } \xi > P \text{ 时.} \end{aligned} \tag{3.3}$$

其中 $S_\xi^{(0)}, S_\xi^{(1)}$ 分别为

ξ	6δ	$6\delta+1$	$6\delta+2$	$6\delta+3$	$6\delta+4$	$6\delta+5$
$S_\xi^{(0)}$	$\delta+1$	δ	$\delta+1$	$\delta+1$	$\delta+1$	$\delta+1$

$\xi-P$	$3\epsilon+1$	$3\epsilon+2$	$3\epsilon+3$
$S_\xi^{(1)}$	$\epsilon+1$	$\epsilon+1$	$\epsilon+1$

其中 δ 和 ϵ 是非负整数. Weber[3] 得到了 S_ξ 的一个递推公式,但不如公式 (3.3) 简单. 应用 (3.3) 我们给出了 P 从 0 到 30 时,总角动量量子数 I 的重复度,结果在表 1 中给出.

下面我们计算 $I = 2P - \xi$ 时的幺正矩阵元 $\left\langle P \overset{c}{\underset{e}{\ }} b \ |\Delta I I\right\rangle$ $\left(若 \left\langle P \overset{c}{\underset{e}{\ }} b \ |\Delta I I\right\rangle 已知, 那么 \left\langle P \overset{c}{\underset{e}{\ }} b \ |\Delta I M\right\rangle 即可容易地求得\right)$. 为了书写方便,引入符号

$$\langle bi|(0P)\Delta\xi\rangle \equiv \left\langle P \overset{P-i}{\underset{e}{\ }} b \ |\Delta I I\right\rangle, \quad I = 2P - \xi \tag{3.4}$$

为了确定附加量子数 Δ, 引入算符 Q, 它是产生三个偶合成总角动量为 0 的声子产生算符.

表 1 辛弱数为 P 时角动量的可取值及其重复度

P \ L	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1			1																												
2			1	0	1																										
3	1	0	0	1	1	0	1																								
4			1	0	1	1	1	0	1																						
5			1	0	1	1	1	1	1	0	1																				
6	1	0	0	1	1	0	2	1	1	1	1	0	1																		
7			1	0	1	1	1	1	2	1	1	1	1	0	1																
8			1	0	1	1	1	1	2	1	2	1	1	1	1	0	1														
9	1	0	0	1	1	0	2	1	1	2	2	1	2	1	1	1	1	0	1												
10			1	0	1	1	1	1	2	1	2	2	2	1	2	1	1	1	1	0	1										
11			1	0	1	1	1	1	2	1	2	2	2	2	2	1	2	1	1	1	1	0	1								
12	1	0	0	1	1	0	2	1	1	2	2	1	3	2	2	2	2	1	2	1	1	1	1	0	1						
13			1	0	1	1	1	1	2	1	2	2	2	2	3	2	2	2	2	1	2	1	1	1	1	0	1				
14			1	0	1	1	1	1	2	1	2	2	2	2	3	2	3	2	2	2	2	1	2	1	1	1	1	0	1		
15	1	0	0	1	1	0	2	1	1	2	2	1	3	2	2	3	3	2	3	2	2	2	2	1	2	1	1	1	1	0	1
16			1	0	1	1	1	1	2	1	2	2	2	2	3	2	3	3	3	2	3	2	2	2	2	1	2	1	1	1	1
17			1	0	1	1	1	1	2	1	2	2	2	2	3	2	3	3	3	3	3	2	3	2	2	2	2	1	2	1	1
18	1	0	0	1	1	0	2	1	1	2	2	1	3	2	2	3	3	2	4	3	3	3	3	2	3	2	2	2	2	1	2
19			1	0	1	1	1	1	2	1	2	2	2	2	3	2	3	3	3	3	4	3	3	3	3	2	3	2	2	2	2
20			1	0	1	1	1	1	2	1	2	2	2	2	3	2	3	3	3	3	4	3	4	3	3	3	3	2	3	2	2
21	1	0	0	1	1	0	2	1	1	2	2	1	3	2	2	3	3	2	4	3	3	4	4	3	4	3	3	3	3	2	3
22			1	0	1	1	1	1	2	1	2	2	2	2	3	2	3	3	3	3	4	3	4	4	4	3	4	3	3	3	3
23			1	0	1	1	1	1	2	1	2	2	2	2	3	2	3	3	3	3	4	3	4	4	4	4	4	3	4	3	3
24	1	0	0	1	1	0	2	1	1	2	2	1	3	2	2	3	3	2	4	3	3	4	4	3	5	4	4	4	4	3	4
25			1	0	1	1	1	1	2	1	2	2	2	2	3	2	3	3	3	3	4	3	4	4	4	4	5	4	4	4	4
26			1	0	1	1	1	1	2	1	2	2	2	2	3	2	3	3	3	3	4	3	4	4	4	4	5	4	5	4	4
27	1	0	0	1	1	0	2	1	1	2	2	1	3	2	2	3	3	2	4	3	3	4	4	3	5	4	4	5	5	4	5
28			1	0	1	1	1	1	2	1	2	2	2	2	3	2	3	3	3	3	4	3	4	4	4	4	5	4	5	5	5
29			1	0	1	1	1	1	2	1	2	2	2	2	3	2	3	3	3	3	4	3	4	4	4	4	5	4	5	5	5
30	1	0	0	1	1	0	2	1	1	2	2	1	3	2	2	3	3	2	4	3	3	4	4	3	5	4	4	5	5	4	6

P \ L	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
1																														
2																														
3																														
4																														
5																														
6																														
7																														
8																														
9																														
10																														
11																														
12																														
13																														
14																														
15																														
16	0	1																												
17	1	1	0	1																										
18	1	1	1	1	0	1																								
19	1	2	1	1	1	1	0	1																						
20	2	2	1	2	1	1	1	1	0	1																				
21	2	2	2	2	1	2	1	1	1	1	0	1																		
22	2	3	2	2	2	2	1	2	1	1	1	1	0	1																
23	3	3	2	3	2	2	2	2	1	2	1	1	1	1	0	1														
24	3	3	3	3	2	3	2	2	2	2	1	2	1	1	1	1	0	1												
25	3	4	3	3	3	3	2	3	2	2	2	2	1	2	1	1	1	1	0	1										
26	4	4	3	4	3	3	3	3	2	3	2	2	2	2	1	2	1	1	1	1	0	1								
27	4	4	4	4	3	4	3	3	3	3	2	3	2	2	2	2	1	2	1	1	1	1	0	1						
28	4	5	4	4	4	4	3	4	3	3	3	3	2	3	2	2	2	2	1	2	1	1	1	1	0	1				
29	5	5	4	5	4	4	4	4	3	4	3	3	3	3	2	3	2	2	2	2	1	2	1	1	1	1	0	1		
30	5	5	5	5	4	5	4	4	4	4	3	4	3	3	3	3	2	3	2	2	2	2	1	2	1	1	1	1	0	1

$$Q=\sqrt{18}\left\langle\begin{matrix}&2&\\3&&2\\&0&\end{matrix}\right\rangle+\sqrt{18}\left\langle\begin{matrix}&1&\\3&&0\\&3&\end{matrix}\right\rangle+\sqrt{27}\left\langle\begin{matrix}&2&\\3&&1\\&2&\end{matrix}\right\rangle-\sqrt{7}\left\langle\begin{matrix}&3&\\3&&3\\&3&\end{matrix}\right\rangle \tag{3.5}$$

算符 Q 与 L_0, $L_{\pm1}$ 对易，但它作用到一个辛弱数为 $P-3$ 的态上，并不产生一个辛弱数为 P 的态，而是产生许多个具有不同辛弱数的态的迭加. 因此，我们引入一个投影算符 $\mathscr{P}$，使得[1)]

$$\mathscr{P}Q|[n-3](0\ \ P-3)\Delta' IM\rangle=\frac{1}{C}|[n](0P)\Delta IM\rangle \tag{3.6}$$

其中 C 是归一化常数. 利用算符 $\mathscr{P}Q=\tilde{Q}$，我们可以按以下规则决定附加量子数 Δ.

(i) 对于任一个辛弱数为 P 的态，若它本身不可能利用公式 (3.6) 从辛弱数为 $P-3$ 的态得到，则记这个态为 $\Delta=0$. 利用公式 (3.3) 可以决定在 $\Delta=0$ 的态中，I 的可取值为

$$I=2P,\ 2P-2,\ \cdots,\ P. \tag{3.6'}$$

并且重复度都是 1[2)]. 因此，态 $|[n](0P)0\ \ IM\rangle$ 是完全确定的.

(ii) 对于辛弱数为 $P-3$, $\Delta=0$ 的任一个态，可以按照公式 (3.6) 构成一个辛弱数为 P 的态，这样的态记为 $\Delta=1$，$|[n](0P)|IM\rangle=\frac{1}{C}\tilde{Q}|[n-3](0P-3)0IM\rangle$. 其中 C 为归一化常数. 由 (i) 中的讨论可知 I 的可取值为 $I=2(P-3),2(P-3)-2,\cdots,(P-3)$

(iii) 继使重复 (ii) 中所使用的方法，可以确定 Δ 为任何数时的波函数

$$|[n](0P)\Delta IM\rangle=\frac{1}{C}\tilde{Q}^{\Delta}|[n-3\Delta](0\ \ P-3\Delta)0IM\rangle$$

其中 C 仍为归一化常数. 这样我们可以把 n 个声子的波函数写为

$$|[n](0P)\Delta IM\rangle=\frac{1}{C}\tilde{Q}^{\Delta}|[n-3\Delta](0\ \ P-3\Delta)0IM\rangle,$$

$$I=2(P-3\Delta),\ 2(P-3\Delta)-2,\ 2(P-3\Delta)-3,\ \cdots,\ (P-3\Delta). \tag{3.7}$$

需要注意的是波函数 (3.7) 是独立的，但是它们不一定相互正交.

将 (3.6) 代入 (3.5)，化简后可得

$$\langle bi|(0P)\Delta\xi\rangle=\frac{1}{C}\sum_{b_1i_1}\langle bi|\tilde{Q}|b_1i_1\rangle\langle b_1i_1|(0P_1)\ \ \Delta-1\ \ \xi_1\rangle, \tag{3.8}$$

其中 $P_1=P-3$, $\xi_1=\xi-6$. 矩阵元 $\langle bi|\tilde{Q}|b_1i_1\rangle$ 可以利用公式 (2.2) 计算出来，结果在表 2 中给出.

从表 2 中可以看出 $\langle 00|\tilde{Q}|b_1i_1\rangle=0$. 于是，对于 $\Delta\neq0$ 的态 $\langle 00|(0P)\ \ \Delta\neq0\ \ \xi\rangle=0$，而对于 $\Delta=0$ 的态却有 $\langle 00|(0P)0\xi\rangle\neq0$，利用这个性质可以决定 $\Delta=0$ 的态.

将 (3.4) 代入 (3.1) 得

$$|[n](0P)\Delta I=M=2P-\xi\rangle=\sum_{b_i}\left|[n]\,P\begin{matrix}P-i&\\&b\\e&\end{matrix}\right\rangle\langle bi|(0P)\Delta\xi\rangle. \tag{3.9}$$

---

1) 应用第 2 节中的公式可以证明 $\tilde{Q}|[n-3](0\ \ P-3)\Delta' IM\rangle\neq0$.

2) 当 $\Delta=0$ 时，$I=2P-\xi$ 时的重复度等于 $S(P\xi)-S(P-3\ \ \xi-6)$. 这是因为：可以通过 (3.6) 式构成 $I=2P-\xi$ 的波函数的个数等于 $S(P-3\ \ \xi-6)$. 再应用公式 (3.3) 即可得到公式 (3.6′).

表 2　$\langle bi|\tilde{Q}|b_1i_1\rangle$

$$\langle bi|\tilde{Q}|b_1i_1\rangle = CQ(P\xi bib_1i_1)\sqrt{\frac{b!(P_1+1-b_1)!(2P+2-b)!(2P_1+1)!}{b_1!(P+1-b)!(2P_1+2-b_1)!(2P+1)!}}$$

$b_1 \quad i_1$	Q
$b-6 \quad i+2$	$\frac{-\sqrt{3(\Lambda+\varepsilon+1)(\Lambda-\varepsilon+1)(\Lambda-\varepsilon+2)(\Lambda+K+1)(\Lambda+K+2)(\Lambda+K+3)}}{(2\Lambda+2)(2\Lambda+3)(2\Lambda+4)}$
$b-6 \quad i+1$	$\frac{-\sqrt{3(\Lambda-\varepsilon+1)(\Lambda+\varepsilon+1)(\Lambda+\varepsilon+2)(\Lambda-K+1)(\Lambda-K+2)(\Lambda-K+3)}}{(2\Lambda+2)(2\Lambda+3)(2\Lambda+4)}$
$b-5 \quad i+1$	$\frac{3\sqrt{(\Lambda+\varepsilon+1)(\Lambda-\varepsilon+1)(\Lambda+K+1)(\Lambda-K+1)}}{(\Lambda+1)(2\Lambda+3)}$
$b-4 \quad i+1$	$\frac{-(\Lambda+3\varepsilon)\sqrt{3(\Lambda-\varepsilon+1)(\Lambda+K+1)(\Lambda+K+2)(\Lambda-K)}}{2\Lambda(2\Lambda+2)(2\Lambda+3)}$
$b-4 \quad i$	$\frac{-(\Lambda-3\varepsilon)\sqrt{3(\Lambda+\varepsilon+1)(\Lambda-K+1)(\Lambda-K+2)(\Lambda+K)}}{2\Lambda(2\Lambda+2)(2\Lambda+3)}$
$b-3 \quad i$	$\frac{-(9\varepsilon K+7\Lambda(\Lambda+1))}{3\Lambda(\Lambda+1)}$
$b-2 \quad i$	$\frac{(\Lambda+1-3\varepsilon)\sqrt{3(\Lambda+\varepsilon)(\Lambda+K+1)(\Lambda-K-1)(\Lambda-K)}}{(2\Lambda-1)(2\Lambda)(2\Lambda+2)}$
$b-2 \quad i-1$	$\frac{(\Lambda+1+3\varepsilon)\sqrt{3(\Lambda-\varepsilon)(\Lambda-K+1)(\Lambda+K-1)(\Lambda+K)}}{(2\Lambda-1)(2\Lambda)(2\Lambda+2)}$
$b-1 \quad i-1$	$\frac{3\sqrt{(\Lambda+\varepsilon)(\Lambda-\varepsilon)(\Lambda+K)(\Lambda-K)}}{\Lambda(2\Lambda-1)}$
$b \quad i-1$	$\frac{\sqrt{3(\Lambda+\varepsilon)(\Lambda+\varepsilon-1)(\Lambda-\varepsilon)(\Lambda-K)(\Lambda-K-1)(\Lambda-K-2)}}{(2\Lambda-2)(2\Lambda-1)(2\Lambda)}$
$b \quad i-2$	$\frac{\sqrt{3(\Lambda-\varepsilon)(\Lambda-\varepsilon-1)(\Lambda+\varepsilon)(\Lambda+K)(\Lambda+K-1)(\Lambda+K-2)}}{(2\Lambda-2)(2\Lambda-1)(2\Lambda)}$

由于 $|[n](0P)\Delta II\rangle$ 满足方程

$$L_1|[n](0P)\Delta II\rangle = 0,\ L_1 = 2\tau_1 - \sqrt{6}\,T_{1/2\,-1/2}. \tag{3.9'}$$

应用第一节中的公式,即可求出 $\langle bi|(0P)\Delta\xi\rangle$ 满足的方程组

$$\langle bi|(0P)\Delta\xi\rangle = \left\{\frac{3(i+1)b(2P+3-b)}{4(P-b)(P+2-b)}\right\}^{1/2}\langle b-1\ i+1|(0P)\Delta\xi\rangle,$$

当 $2b+3i+1=\xi$ 时,

$$\langle bi|(0P)\Delta\xi\rangle = +\left\{\frac{4(\xi_i+2-2b)(P+b-\xi_i)(P+2-b)(P+1-b)}{3b(\xi_i+1-2b)(P+1-b-i)(2P+3-b)}\right\}^{1/2}$$

$$\cdot\langle b-1i|(0P)\Delta\xi\rangle - \left\{\frac{(i+1)(b-1)(P+1-b-\xi_i)(2P+4-b)(P+1-b)}{b(\xi_i+1-2b)(P+1-b-i)(2P+3-b)(P+3-b)}\right\}^{1/2}$$

$$\cdot\langle b-2\ i+1|(0P)\Delta\xi\rangle,$$

$$\text{当 } 0\leqslant b\leqslant\frac{\xi}{2},\quad \xi-P-b\leqslant 3i\leqslant\xi-2b \text{ 时}, \tag{3.10}$$

其中 $\xi i = \xi - 3i$.

作变换

$$\langle bi|(0P)\Delta\xi\rangle = \frac{F(bi\Delta\xi)}{Cb!\,i!\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^b \frac{P+1-b}{P-b}\binom{P-b}{i}\binom{P-b}{\xi i-2b}\binom{2P+2}{b}}}, \tag{3.11}$$

其中 C 是归一化常数,选择 C 使得

$$F(0\ i_{\min}\,\Delta\xi) = 1, \tag{3.11'}$$

其中 $i_{\min}$ 是使 $F(0i\Delta\xi) \neq 0$ 时的最小 i 值. 将 (3.11) 代入 (3.10) 得

$$F(bi\Delta\xi) = \frac{3}{4}\frac{b(2P+3-b)}{P+2-b}F(b-1\ \ i+1\ \Delta\xi),\text{当 } 2b+1+3i=\xi \text{ 时}, \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned} F(bi\Delta\xi) &= (\xi_i+2-2b)F(b-1i\Delta\xi) \\ &\quad -\frac{3}{4}\frac{(b-1)(2P+4-b)(P+1+b-\xi i)}{(P+2-b)(P+3-b)}F(b-2\ \ i+1\ \ \Delta\xi), \\ &\quad \text{当 } 0\leqslant b\leqslant\frac{\xi}{2},\ \xi-P-b\leqslant 3i\leqslant\xi-2b \text{ 时}. \end{aligned} \tag{3.12'}$$

从 (3.12′) 可以看出 $b \neq 0$ 时的 $F(bi\Delta\xi)$ 是 $F(0i\Delta\xi)$ 的线性组合,即

$$F(bi\Delta\xi) = \sum_j f(\xi_i bj)F(0\ \ i+j\ \ \Delta\ \xi), \tag{3.13}$$

其中 $f(\xi_i bj)$ 由下式决定

$$\begin{aligned} f(\xi_i bj) &= (\xi_i+2-2b)f(\xi_i\ \ b-1\ \ j) \\ &\quad -\frac{3}{4}\frac{(b-1)(2P+4-b)(P+1+b-\xi_i)}{(P+2-b)(P+3-b)}f(\xi_i\ b-2\ j-1), \\ f(\xi_i 0j) &= \delta(j0). \end{aligned} \tag{3.14}$$

经简单计算有

$$f(2b+1\ \ b+1\ \ 0) = (2b+1)!!,\ f(2b+1\ \ b+1\ \ 1) = (2b+1)!!/2. \tag{3.14'}$$

将 (3.13) 代入 (3.12) 可得 $F(0i\Delta\xi)$ 满足的方程组

$$\sum_j f(\xi_i\ \ b+1\ \ j)F(0\ \ i+j\ \ \Delta\xi) = 0,\quad \xi_i = 2b+1. \tag{3.15}$$

利用 (3.14′) 可以容易地得到 $\Delta = 0$ 时的 $F(0i\Delta\xi)$ (它除了满足(3.15)以外,要求 $F(00\Delta = 0\xi) \neq 0$). 于是有

$$\begin{aligned} F(0i0\xi) &= \delta(i,0),\quad \xi=\text{偶}; \\ &= \delta(i,0)+2\delta(i,1),\quad \xi=\text{奇}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

将 (3.11) 代入 (3.8), 并取 $b=0$, 即得

$$F(0i\Delta\xi) = \frac{1}{\Delta}\{iF(0\ i-1\ \Delta-1\ \xi-6)+i(i-1)F(0\ i-2\ \Delta-1\ \xi-6)\}. \tag{3.17}$$

由 (3.16) 及 (3.17) 可以得到

$$\begin{aligned} F(0i\Delta\xi) &= \frac{i!}{(i-\Delta)!(2\Delta-i)!},\quad \xi=\text{偶}; \\ &= \frac{(i+1)!}{(i-\Delta)!(2\Delta+1-i)!},\quad \xi=\text{奇}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

至此我们就完全确定了 n 个声子波函数的物理基 $|[n](0P)\Delta II\rangle$ 了,即

$$\left|[n](0P)\Delta II\right\rangle = \sum_{bi} \left|[n]\ P^{P-i}_{e}\ b\right\rangle \langle bi|(0P)\Delta\xi\rangle, \tag{3.19}$$

表 3　$\langle bi|(0P)\Delta\xi\rangle$*

$P=0$

bi \ $\Delta\xi$	0, 0
0 0	1

$P=1$

bi \ $\Delta\xi$	0, 0
0 0	1

$P=2$

bi \ $\Delta\xi$	0, 0	0, 2
0 0	1	$\sqrt{\frac{3}{7}}$
1 0		$\sqrt{\frac{4}{7}}$

$P=3$

bi \ $\Delta\xi$	0 0	0, 2	0, 3	1, 6
0 0	1	$\sqrt{\frac{3}{11}}$	$\sqrt{\frac{3}{10}}$	0
0 1			$\sqrt{\frac{4}{10}}$	$\sqrt{\frac{18}{70}}$
0 2				$\sqrt{\frac{18}{70}}$
1 0		$\sqrt{\frac{8}{11}}$	$-\sqrt{\frac{3}{10}}$	
1 1				$\sqrt{\frac{27}{70}}$
3 2				$-\sqrt{\frac{7}{70}}$

$P=4$

bi \ $\Delta\xi$	0, 0	0, 2	0, 3	0, 4	1, 6
0 0	1	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	$\sqrt{\frac{1}{7}}$	$\sqrt{\frac{243}{715}}$	0
0 1			$\sqrt{\frac{4}{7}}$	0	$\sqrt{\frac{81}{622}}$
0 2					$\sqrt{\frac{216}{622}}$
1 0		$\sqrt{\frac{4}{5}}$	$\sqrt{\frac{2}{7}}$	$\sqrt{\frac{216}{715}}$	0
1 1					$\sqrt{\frac{216}{622}}$
2 0				$\sqrt{\frac{256}{715}}$	$-\sqrt{\frac{9}{622}}$
3 0					$-\sqrt{\frac{100}{622}}$

* Δ确定后ξ的可取值为 6Δ, $6\Delta+2$, $6\Delta+3$, $\cdots$, $P+3\Delta$.

其中系数 $\langle bi|(0P)\Delta\xi\rangle$ 由公式 (3.11)、(3.13)、(3.15) 给出.

在实际应用中还应当把波函数 (3.19) 正交化用 $|[n](0P)\Delta II\rangle_{or}$ 表示正交化了的声子波函数,它们可以选为

$$
\begin{aligned}
&|[n](0P)0II\rangle_{or} = |[n](0P)0II\rangle, \\
&|[n](0P)1II\rangle_{or} = C_0|[n](0P)0II\rangle + C_1|[n](0P)1II\rangle, \qquad (3.20) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

应用以上公式我们计算了一些声子的波函数,结果在表 3 中给出.

我们已经给出了 n 个声子波函数的物理基的表达式, 波函数 $|[n](0P)\Delta IM\rangle_{or}$ 经过适当的选择可以解释为一些振动带, 关于这方面的讨论可以参看 A. Arima 的文章[3].

结 束 语

以上我们讨论了 n 个声子波函数的一般性质, 我们准备应用本文的结果讨论原子核形状四极振动的非简谐性问题.

参 考 文 献

[1] B. F. Bayman, Some Lectures on Group and Their Application to Spectroscopy, Nordita, 1960.
[2] K. T. Hecht, *Nucl. Phys.*, **63**(1965). 117.
[3] A. Arima and F. Iachllo, *Ann. Phys.*, **99**(1976), 253.
[4] H. J. Weber et al., *Z. Physik*, **190**(1966), 25.
[5] N. Kemmer et al., *J. Math. Phys.*, **9**(1968), 1224, 1230.

ON THE WAVE FUNCTIONS OF THE NUCLEAR QUADRUPLE OSCILLATIONS

SUN HONG-ZHOU
(*Peking University*)

ABSTRACT

With the help of the commutation relations of the creation and annihilation operators, the wave functions for the nuclear quadruple oscillations are discussed. An explicit expression for the phonon wave functions constructed according to the group chain $U_5\supset R_5\supset SU_2\otimes SU_2$ and some of their important relations are given. The unitary transformation loefficiens from the basis mentioned above to the one constructed according to the group chain $U_5\supset R_5\supset R_3$ are also discussed. A formula for the transformation coefficients is given.

In this paper, a general formula of the multiplicity factor for given angular momentum quantum number I and seniority number P is derived and a table of the P and I values for $P\leqslant 30$ is given.