

关于束缚态介子波函数的几率解释

王明中 郑希特 汪克林

(成都科学技术大学) (中国科学技术大学)

先鼎昌 章正刚

(中国科学院高能物理研究所) (成都地质学院)

摘 要

本文以近平底势下的 0^- 介子波函数为例,一方面,认为由四维协变的B-S方程解出的介子波函数在等时极限下所给出的三维位形空间波函数有几率振幅的意义,利用它计算了介子的 $\langle r^2 \rangle$;另一方面,直接从四维B-S波函数出发,先算出介子的类空形状因子,然后由其零点斜率导出 $\langle r^2 \rangle$,数字计算表明二者有较好的符合(只标量耦合情形误差略大,约达30%),从而表明:尽管四维B-S波函数不明确具有几率振幅的意义,但是,由它在等时极限下得到的三维位形空间介子波函数被赋予几率振幅的解释却是合理的。

一、

在层子模型中,作为正反层子束缚态的介子是由B-S方程所解出的B-S波函数来描述的。B-S方程是一个相对论性协变的方程,直接求解B-S方程所得到的四维波函数在位形空间是层子、反层子间相对坐标和相对时间的函数。这就为四维波函数的物理诠释带来了困难。为避免这个困难,有的工作是首先作瞬时相互作用近似,这样,两粒子的四维波函数就由三维波函数唯一地决定,四维波函数的归一化条件等同于三维波函数的归一化条件^[1],它表明三维波函数可以作几率振幅的解释。但是,为了使对B-S方程的处理能保持其协变性,在工作[2]中没有采用瞬时相互作用近似。那里在提出一个四维协变的 ν 势或近平底势^[3]后,在欧氏动量空间解出了介子波函数。为得到位形空间波函数,作四维傅氏变换,这样得到的位形空间波函数是正反层子间的相对时间和相对坐标的函数。显然,如果我们把这波函数理解为正反层子在一定的相对距离上和处于一定的相对时间的几率振幅,则物理意义是不明确的。但是,如果我们取等时极限,即,令相对时间为零,从而得到一个三维空间波函数。对这样一个三维空间波函数,把它理解为层子、反层子在一定的相对距离上构成介子束缚态的几率振幅,则可能是合理的,本着这种解释,我们曾用以来计算介子半径^[2]。但是,我们希望能有无需借助于等时极限的另外途径来证实上述几率诠释的正确、合理性。

在文献[4]中我们提到了另一个计算半径的途径,在那里解决了直接由欧氏 B-S 波函数计算介子类空电磁形状因子的问题。它是直接在经过 Wick 旋转后的动量空间完成的,因而与等时极限的处理无关。在有了类空电磁形状因子后,我们就可以如同由核子电磁形状因子计算核子电磁半径那样^[5],直接由形状因子算出介子的 $\langle r^2 \rangle$ 。以这样算得的结果来核对作等时极限后算得的结果,就可以检验把等时极限下得到的位形空间波函数赋予几率振幅的解释是否合理。这就是本工作的目的。计算的结果给予了肯定的回答。

在下一节中我们回顾一下等时极限下对 $\langle r^2 \rangle$ 的计算,在第三节中给出由类空电磁形状因子出发时 $\langle r^2 \rangle$ 的计算。在最后一节中给出两个方法的计算结果之比较和结论。

二、

在低分波近似下,在质心系中赝标介子波函数写为^[2]

$$\begin{aligned} \chi(P, B) = & F_0^{(1)}(P)\gamma_5 + BF_0^{(2)}(P)\gamma_4\gamma_5 + F_1^{(3)}(P)\hat{P}C_1(\cos\theta)\gamma_5 \\ & + F_0^{(4)}(P)B\varepsilon_{\nu\lambda\alpha}P_\nu\sigma_{\lambda\alpha}. \end{aligned} \quad (1)$$

其中

$$B = \frac{m}{2M}, \quad (2)$$

m, M 分别表示介子和层子质量, P 代表层子反层子经 Wick 旋转后的相对动量, $F_n^{(i)}(P)$ 则由如下的由 B-S 方程导出的积分方程组求出

$$\begin{aligned} F_n^{(i)} = & \mathcal{G}^2 \sum_{n'} \sum_{j=1}^4 \int_0^\infty dK \mathcal{X}_{nn'}^{ij} F_n^{(j)}, \quad i = 1, 2, 3, 4 \\ n, n' = & \begin{cases} 0, & \text{如果 } i, j = 1, 2, 4, \\ 1, & \text{如果 } i, j = 3. \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

其中 \mathcal{G}^2 为无量纲耦合常数, $\mathcal{X}_{nn'}^{ij}$ 是 B-S 积分核。

为得到位形空间波函数,作四维傅氏变换

$$\chi(x_\mu, B) = \int d^4P \chi(P, B) e^{iP \cdot x}. \quad (4)$$

其中 x_μ 是层子反层子的相对坐标与相对时间的欧氏 4 矢。作为相对时间的函数,对 $\chi(x_\mu, B)$ 的物理诠释有一定困难。然而,如果我们看层子、反层子在同一个时间的三维超面上的行为,那么,相对时间等于零,即

$$x_4 = 0. \quad (5)$$

这就是所谓的等时极限,在这极限下四维的位形空间波函数导致了三维位形空间波函数 $\chi(\mathbf{x}, B)$, 把 $\chi(\mathbf{x}, B)$ 诠释为正、反层子在相对距离为 \mathbf{x} 处形成束缚态的几率振幅是较自然的。把 (1) 代入 (4) 得

$$\begin{aligned} \chi(\mathbf{x}, B) = & I_0^{(1)}(\mathbf{x}, B)\gamma_5 + BI_0^{(2)}(\mathbf{x}, B)\gamma_4\gamma_5 \\ & + I_1^{(3)}(\mathbf{x}, B)\gamma_4\gamma_5 + BI_0^{(4)}(\mathbf{x}, B)\gamma_4\gamma_\alpha\gamma_5. \end{aligned} \quad (6)$$

其中

$$\begin{aligned}
 I_0^{(1),(2)}(\mathbf{x}, B) &= \frac{4\pi^2}{R} \int P^2 dPF_0^{(1),(2)}(P, B) J_1(PR), \\
 I_1^{(3)}(\mathbf{x}, B) &= \frac{8\pi^2}{R^2} \int P^2 dPF_1^{(3)}(P, B) J_2(PR), \\
 I_{0\alpha}^{(4)}(\mathbf{x}, B) &= \frac{8\pi^2}{R^2} x_\alpha \int P^3 dPF_0^{(4)}(P, B) J_2(PR). \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (7)
 \end{aligned}$$

J_i 是贝塞尔函数, $R = |\mathbf{x}|$. 于是: 介子的大小由层子反层子间的相对距离决定, 即直径为 R 的介子束缚态的几率为¹⁾

$$\mathcal{F}(R) = 4\pi R^2 f(R) / \int_0^\infty 4\pi R^2 dR f(R), \quad (8)$$

其中

$$f(R) = Tr\{\chi^+(\mathbf{x})\chi(\mathbf{x})\} = 4\{I_0^{(1)2} + (BI_0^{(2)} + I_1^{(3)})^2 + B^2 I_{0\alpha}^{(4)} I_{0\alpha}^{(4)}\}. \quad (9)$$

在近平底势情况下, 我们所算得的赝标介子波函数的第三分量远较之其它分量为小, 故在 (9) 式中 $I_1^{(3)}$ 可以忽略. 于是介子均方半径可计算如下:

$$\langle r^2 \rangle_p = \frac{1}{4} \int R^2 \mathcal{F}(R) dR, \quad (10)$$

下标 p 是指示赋予三维波函数以几率诠释时的计算结果.

如前所述, 我们期望能从另外一个不作等时极限的途径来计算 $\langle r^2 \rangle$, 从而检验三维波函数被赋予几率解释的合理性. 这个途径就是通过形状因子来计算 $\langle r^2 \rangle$.

三、

如同在讨论核子的电磁形状因子时所作的那样^[5], 电磁形状因子 $F(Q^2)$ 可以按小的 Q^2 作展开:

$$F(Q^2) \approx 1 - \frac{1}{6} \langle r^2 \rangle Q^2 + \dots, \quad (11)$$

其中 Q^2 是传递动量. 所以我们有

$$\langle r^2 \rangle_f = -6 \frac{\partial}{\partial Q^2} F(Q^2) |_{Q^2=0}, \quad (12)$$

下标 f 表示是通过形状因子进行计算的. 在 [4] 中我们给出了赝标介子类空形状因子 F 的表达式 (忽略了层子所可能具有的反常磁矩). 它可直接由四维欧氏动量空间波函数计算出来:

$$\begin{aligned}
 F(4K^2) &= \frac{1}{N} \int d^4P \left\{ F_1(P-K)F_2(P) - 2F_1(P-K)F_2(P) \right. \\
 &\quad \left. + B^2 F_2(P-K)F_2(P) + 2(2P^2 - 2P_4^2 - P_1K) \right. \\
 &\quad \left. \times F_1(P-K)F_4(P) - 2P_1K F_2(P-K)F_4(P) \right\}
 \end{aligned}$$

1) 在工作 [2] 中的 (37) 式应该是直径为 R 的介子束缚态的几率, 其下的 (38) 式应是均方直径之表达式, 均方半径应为 $\langle r^2 \rangle^{1/2} = \frac{1}{2} \langle R^2 \rangle^{1/2}$, 故该文所列之 $\langle R^2 \rangle^{1/2}$ 之数值均应缩小一倍始为均方半径之值; 顺此更正.

$$+ \left[4B^2(P^2 - P_4^2) + K^2(2P^2 + P_4^2 - 2B^2 - \frac{1}{2}K^2 - P_1^2) \right] F_4(P-K)F_4(P) \}, \quad (13)$$

其中归一因子

$$N = \int d^4P \{ F_1^2(P) - 2F_1(P)F_2(P) + B^2F_3^2(P) + 4(P^2 - P_4^2)F_1(P)F_4(P) + 4B^2(P^2 - P_1^2)F_2^2(P) \}. \quad (14)$$

它使得

$$F(0) = 1. \quad (15)$$

在(12)、(13)中的 $\int d^4P$ 是四维欧氏空间积分。而且

$$\begin{aligned} F_i &= F_0^{(i)}, \quad i = 1, 2, 4, \\ P^2 &= P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + P_4^2, \end{aligned} \quad (16)$$

在(13)式中 K^2 与传递动量 Q^2 的关系为

$$Q^2 = 4K^2. \quad (17)$$

(13)式给出的是类空形状因子, $4K^2 > 0$, 我们为简单计把传递动量选为 $(2K, 0, 0, 0)$. 为完成(12)式的计算, 先把(13)式中各 $F_i(P-K)$ 展开以分离各级 K^2 因子, 为算 $\langle r^2 \rangle$ 则只需保留到 K^2 级就够了。

注意, $F_i(P)$ 只是 $|P|$ 的函数, 或者只看成是 P^2 的函数, 于是, 例如

$$\begin{aligned} F_i(P-K) &\equiv F_i(P^2 + K^2 - 2P \cdot K) = F_i(P^2 + K^2 - 2P_1K) \\ &= F_i(P^2) + (K^2 - 2P_1K) \frac{\partial F_i}{\partial P^2} + \frac{1}{2!} (K^2 - 2P_1K)^2 \frac{\partial^2 F_i}{\partial (P^2)^2} + \dots \\ &= F_i(P^2) + (K^2 - 2P_1K) \frac{\partial F_i}{\partial P^2} + 2P_1^2 K^2 \frac{\partial^2 F_i}{\partial (P^2)^2} + O(K^4), \end{aligned} \quad (18)$$

所有 P_1 的奇次项 (从而所有 K 的奇次项) 在 F_i 代入(13)式中后对 P_1 的积分将给出零。

此外, 注意到 $\frac{\partial^2 F_i}{\partial (P^2)^2} F_i$ 中 P_1, P_2, P_3, P_4 的对称性, 并作分部积分, 例如有:

$$\begin{aligned} \int d^4P \cdot P_1^2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial (P^2)^2} F_2 &= \int dQ \int P^3 dP \frac{P^2}{4} \frac{\partial^2 F_1}{\partial (P^2)^2} F_2 \\ &= -\frac{\pi^2}{2} \int dP \left[P^2 F_1'(P) F_2(P) + \frac{1}{4} P^3 F_1'(P) F_2'(P) \right], \end{aligned} \quad (19)$$

其中

$$F_i'(P) = \frac{\partial F_i(P)}{\partial P}. \quad (20)$$

(13)式中其它各项作类似处理, 结果得

$$\begin{aligned} F(K^2) &= 1 - \frac{\pi^2 K^2}{4N} \int P^3 dP \left[F_1'^2 - 2F_1'F_2' + B^2F_2'^2 + 4P(F_1' - F_2')F_4 \right. \\ &\quad \left. + \frac{10}{3} P^2 F_1'F_4' + 8B^2 P F_4'F_4 + \frac{10}{3} B^2 P^2 F_4'^2 + 16(B^2 - P^2)F_4^2 \right] + O(K^4). \end{aligned} \quad (21)$$

其中 N 可由 (14) 式化为一维积分:

$$N = 2\pi^2 \int dP \cdot P^3 [F_1^2 - 2F_1F_2 + B^2F_2^2 + 3P^2F_1F_4 + 3B^2P^2F_4^2]. \quad (22)$$

于是以 (21) 代入 (12) 式, 注意到 (16), 有

$$\begin{aligned} \langle r^2 \rangle_f = & -\frac{6}{4} \frac{\partial}{\partial K^2} F(4K^2) \Big|_{K^2=0} = \frac{3\pi^2}{8N} \int P^3 dP \left[F_1'^2 - 2F_1'F_2' + B^2F_2'^2 \right. \\ & \left. + 4P(F_1' - F_2' + 2B^2F_4')F_4' + \frac{10}{3}P^2(F_1' + B^2F_4')F_4' + 16(B^2 - P^2)F_4'^2 \right]. \quad (23) \end{aligned}$$

由这个公式, 在求得了欧氏动量空间的 B-S 波函数后, 可以直接求出介子的 $\langle r^2 \rangle$ 值来 (勿需事先计算类空形状因子了)。当然, 如果类空形状因子已经算出, 那么, 由类空形状因子在 $K^2 = 0$ 点的斜率 (用作图法) 亦可得到 $\langle r^2 \rangle$, 如在 [4] 中所指出的那样。

四、

本节我们给出近平底势下, 对赝标介子用几率解释的 (10) 式和直接由形状因子导出

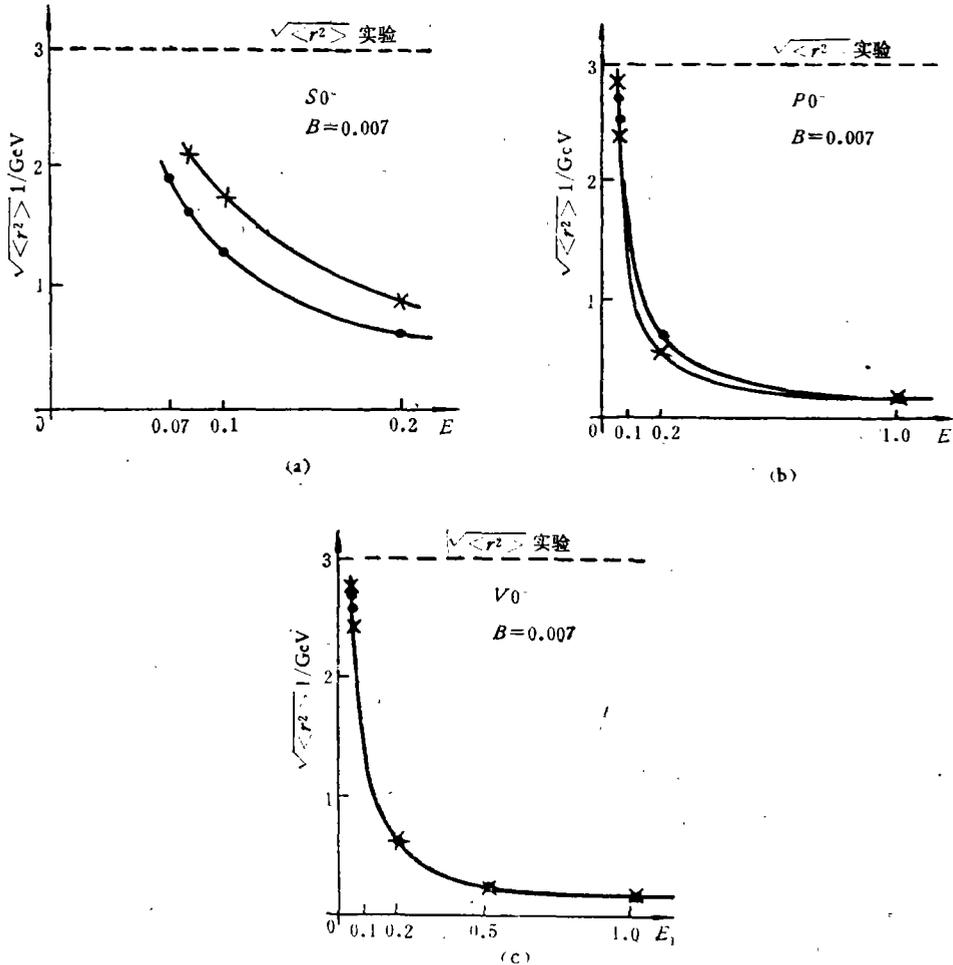


图 1

的(23)式两种办法计算的结果,分别示于图中.

我们在计算中设 $M = 10 \text{ GeV}$, π 介子相应于 $B = 0.007$. 在图 1(a), (b), (c) 中给出固定 $B = 0.007$ 时, 0^- 介子分别由标量耦合、赝标耦合与矢量耦合形成时 $\langle r^2 \rangle^{1/2}$ 随 E 的变化关系. 图中“·”点代表用(10)式计算的 $\langle r^2 \rangle_p^{1/2}$, 而“×”号代表的是用(23)式计算出的 $\langle r^2 \rangle_p^{1/2}$. 在标量耦合时(图 1(a)) $\langle r^2 \rangle_p^{1/2}$ 与 $\langle r^2 \rangle_p^{1/2}$ 基本行为是一致的, 误差约为 30%, 而对赝标耦合(图 1(b)) 与矢量耦合(图 1(c)), $\langle r^2 \rangle_p^{1/2}$ 与 $\langle r^2 \rangle_p^{1/2}$ 则几乎重合.

若固定 $E = 0.2$, 从图 2 上也可看出对标量耦合情形(图 2(a)) 二者有较大差异, 而对赝标耦合(图 2(b)) 和矢量耦合(图 2(c)), 则有较好的符合. 即便是对标量耦合, 注意到在 B 减小时, 其差异亦随之减小. 因而对物理上感兴趣的紧束缚态, 差异亦不大.

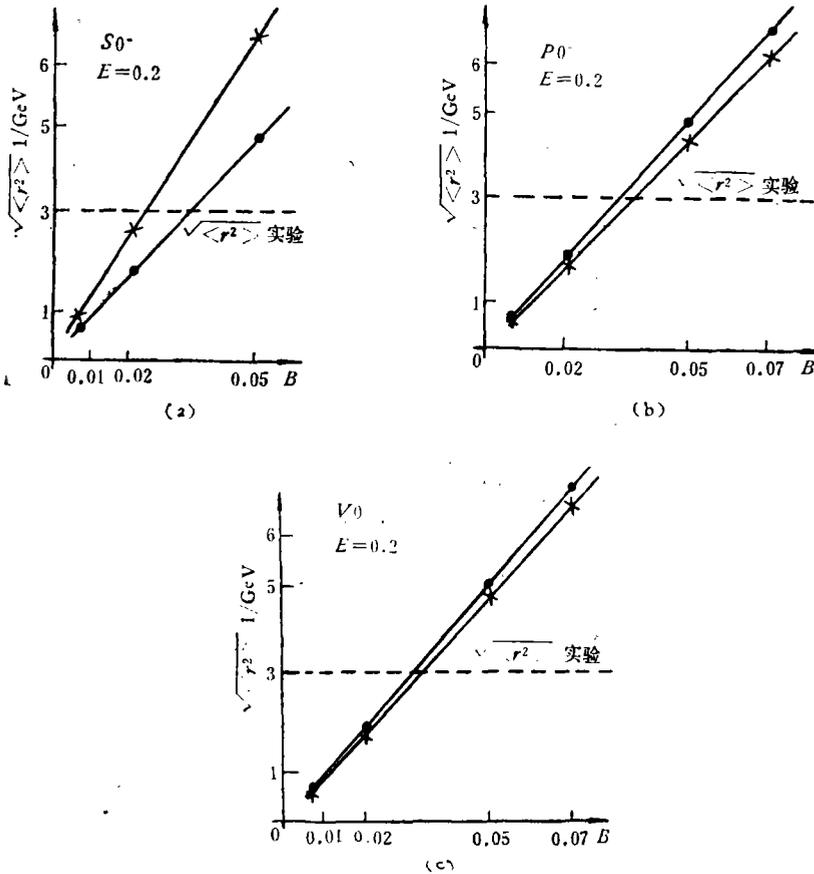


图 2

于是,我们可以认为 $\langle r^2 \rangle_p^{1/2}$ 与 $\langle r^2 \rangle_p^{1/2}$ 的基本符合表明,在等时极限下得到的三维介子波函数被赋予几率振幅的意义看来是正确、合理的. 在同一量级下两种算法所得结果的不同,是容易理解的,因为毕竟电磁半径只牵涉到带电组分的分布,而几率解释则不限于带电组分.

另外,从图 1 上看 $\langle r^2 \rangle^{1/2} E \sim \text{常数}$, 如双曲线的行为. 忆及势阱在三维位形空间的势阱是 $E \cdot R$ 的函数,当其它参数固定时,固定势阱, $E \cdot R$ 就固定了, $ER \sim \text{常数}$, 所以

$\langle r^2 \rangle^{1/2}$ 与阱宽成正比, 这是自然的. 而图 2 表明固定 E 时 $\langle r^2 \rangle^{1/2}$ 与束缚之紧松成正比, 也是很自然的结果.

感谢朱洪元同志对本工作的关心和讨论.

参 考 文 献

- [1] 中国科学院原子能研究所基本粒子理论组, 原子能, **3**(1966), 137.
- [2] 洗鼎昌、郑希特、王明中、汪克林、章正刚, 物理学报, **27**(1978), 94.
- [3] 王明中、郑希特、洗鼎昌、汪克林、章正刚, 高能物理与核物理, **1**(1977), 7.
- [4] 王明中、郑希特、汪克林、洗鼎昌、章正刚, 高能物理与核物理, **3**(1979), 572.
- [5] D. R. Yennie, M. M. Levy and D. G. Ravenhall, *Rev. Mod. Phys.*, **29** (1957), 144.

ON THE PROBABILITY INTERPRETATION OF THE BOUND STATE WAVE FUNCTION OF THE MESON

WANG MING-ZHONG, ZHENG XI-TE

(*Chengdu University of Science and Technology*)

WANG KE-LIN

(*University of Science and Technology of China*)

XIAN DING-CHANG

(*Institute of High Energy Physics, Academia Sinica*)

ZHANG ZHENG-GANG

(*Chengdu Institute of Geology*)

ABSTRACT

The probability interpretation of the bound state meson wave functions is discussed by taking the 0^- meson wave function solved for the nearly flat bottom potential as an example. On the one hand, given a probability amplitude sense to the three dimensional wave function of the meson in the configuration space obtained under the equal time limit of the four dimensional covariant wave functional solved from the B-S equation, the averaged radius $\langle r^2 \rangle$ of the meson can be calculated. On the other hand, the electromagnetic average radius $\langle r^2 \rangle$ is evaluated from the slope at the origin of the space-like electromagnetic form factor of the meson calculated directly from the four dimensional B-S wave function. The two averaged values are compared and turn out to be in good coincidence (except for the case of scalar coupling, in which the difference is about 30%). This shows that though the four dimensional B-S wave function does not possess a definite sense of probability amplitude, nevertheless, it might be plausible to give such a sense to the three dimensional configuration space wave function of the meson obtained from the four dimensional one under the equal time limit.