

自能图对标量 Bethe-Salpeter 方程解的影响

李炳安 冼鼎昌

(中国科学院高能物理研究所)

严肃 陈天崙 杨庆珠 吕景发

(南开大学)

摘 要

本文取相互作用为 $g\phi_1^*(x)\phi_1(x)\phi_2(x)$, 在标量梯形近似的 B-S 方程中加入自能图的贡献, 研究自能图对解的性质的影响. 计算结果表明, 对基态的解, 自能图将本征值拉低, 对波函数的影响不大. 对激发态以及反对称的解, 自能图的影响很大, 将解的性质完全改变了. 从本文所得的结果, 还可以认为, 梯形近似只有对松束缚才有意义, 在束缚变紧以后, 自能图的贡献是重要的.

一、引 言

1954年, Wick 与 Cutkosky 研究了梯形近似下标量 B-S 方程的解, 对梯形近似下该方程的解的性质有了较多的认识. 一般来说, 特别是在相互作用比较强的情况下, B-S 方程是十分复杂的. 以标量方程为例, 它可写成

$$\Delta^{-1}(p_1)\Delta^{-1}(p_2)X(p) = \int G(P, p, p')X(p')d^4p' \quad (1.1)$$

其中

$$p_1 = \frac{1}{2}P + p, \quad p_2 = \frac{1}{2}P - p, \quad \Delta^{-1}(p) = i(p^2 + m^2). \quad (1.2)$$

P_μ 是束缚态的质心四动量, p_μ 是相对四动量, m 是组成该束缚态的标量粒子的质量; 假定两个标量粒子的质量相等. 方程 (1.1) 的积分核 $G(P, p, p')$ 中, 包含四点纠缠在一起的四点不可约费曼图的集合 (去腿), 也包含自能图. M. J. Levine 等人^[1,2]曾指出, 如果取 ϕ^3 相互作用, 当积分核中不考虑自能图的贡献, 用梯形近似的 B-S 方程计算非弹性区的相移时, 么正条件 $\sigma_{tot} \geq \sigma_{el}$ 将被破坏. 而当



图 1

梯形近似的方程中考虑了最低级的自能图贡献以后,上述么正条件可以得到满足. 该文还讨论了自能图对束缚态的基态本征值的影响,指出在紧束缚区,这种影响是比较大的.

为了进一步研究这个问题,本文取相互作用为:

$$\mathcal{H}_i(x) = g\phi_1^*(x)\phi_1(x)\phi_2(x), \quad (1.3)$$

在方程(1.1)中,积分核 $G(P, p, p')$ 取二级图: 它包含三个图(图1).

用这样的核求解方程,对基态解,高激发态解以及反常解的性质进行了研究. 结果发现自能图对解的影响,特别是对非基态和反常解的影响是很大的.

第二节中介绍本文所用的解法. 第三节中给出没有自能图的 B-S 方程的解,并与别的方法得到的解相比较. 第四节中给出有自能图的 B-S 方程的解. 第五节中讨论解出的波函数. 最后一节对所得的结果进行简短的讨论.

二、方程的解法

方程(1.1)中,积分核取二级图后得:

$$G(P, p, p') = \frac{i\lambda}{\pi^2} \frac{1}{(p-p')^2 + \mu^2} - \lambda h(p)(p_1^2 + m^2)(p_2^2 + m^2)\delta^4(p-p'), \quad (2.1)$$

其中

$$h(p) = \int_{(m+\mu)^2}^{\infty} \frac{p_1^2 + m^2}{p_1^2 + \sigma^2 - i\epsilon} \frac{[\sigma^2 - (m+\mu)^2]^{\frac{1}{2}} [\sigma^2 - (m-\mu)^2]^{\frac{1}{2}}}{\sigma^2(\sigma^2 - m^2)^2} d\sigma^2 \\ + \int_{(m+\mu)^2}^{\infty} \frac{p_2^2 + m^2}{p_2^2 + \sigma^2 - i\epsilon} \frac{[\sigma^2 - (m+\mu)^2]^{\frac{1}{2}} [\sigma^2 - (m-\mu)^2]^{\frac{1}{2}}}{\sigma^2(\sigma^2 - m^2)^2} d\sigma^2, \\ \lambda = \frac{g^2}{16\pi^2}, \quad (2.2)$$

m 是 ϕ_1 介子场的质量, μ 是交换介子场 $\phi_2(x)$ 的质量. 自能图表达式 $h(p)$ 是在考虑重整化以后,用谱函数方法得到的.

把(2.1)式代入方程(1.1)中,作 Wick 转动后,该方程可写成

$$(p_1^2 + m^2)(p_2^2 + m^2)\chi(p) = \frac{\lambda}{\pi^2} \int \frac{\chi(p')d^4p'}{(p-p')^2 + \mu^2} \\ + \lambda h(p)(p_1^2 + m^2)(p_2^2 + m^2)\chi(p). \quad (2.3)$$

在静止系中,把波函数中轨道运动的三维球谐函数分离出来,讨论量子数为 l 及 m 的情况:

$$\chi(p) = \frac{1}{|\mathbf{p}|} f_l(|\mathbf{p}|, p_4) Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (2.4)$$

将(2.4)代入(2.3)式后,得方程

$$\phi_l(p) = \frac{2\lambda}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp'_4 \int_0^{\infty} d|\mathbf{p}'| \frac{Q_l(a)}{L(p)L(p')} \phi_l(p'_4, |\mathbf{p}'|) + \lambda h(p)\phi_l(p), \quad (2.5)$$

其中 $Q_l(a)$ 是第二类勒让德函数,而

$$a = \frac{(p_4 - p'_4)^2 + |\mathbf{p}'|^2 + |\mathbf{p}|^2 + \mu^2}{2|\mathbf{p}||\mathbf{p}'|},$$

$$\phi_l(p) = L(p)f_l(p), \quad L^2(p) = (|\mathbf{p}|^2 + p_4^2 + 1 - \eta^2)^2 + 4\eta^2 p_4^2,$$

$$\eta = \frac{M}{2m},$$

M 是束缚态的静止质量, η 是其参量. (2.5) 式中的以上各量都用 m 除过, 变成无量纲的量.

我们就得到了欧氏空间中的一个两维积分方程. 注意到在束缚态的质心系中, 方程 (2.5) 对变换 $p_4 \leftrightarrow -p_4$ 具有不变性, 因而可改写成为:

$$\phi_l^\pm(p) = \lambda h(p)\phi_l^\pm(p) + \lambda \int_0^\infty dp'_4 \int_0^\infty d|\mathbf{p}'| K^\pm(p, p')\phi_l^\pm(p'), \quad (2.6)$$

其中积分核:

$$K^+(p, p') = \frac{2}{\pi} \frac{Q_l(a(p_4)) + Q_l(a(-p_4))}{L(p)L(p')},$$

$$K^-(p, p') = \frac{2}{\pi} \frac{Q_l(a(p_4)) - Q_l(a(-p_4))}{L(p)L(p')}. \quad (2.7)$$

由于 $h(p)$ 是 p_4 的偶函数, 因而有

$$\phi_l^\pm(|\mathbf{p}|, -p_4) = \pm \phi_l^\pm(|\mathbf{p}|, p_4). \quad (2.8)$$

显然, $\phi_l^-(p)$ 没有非相对论近似, 是反常解. 方程 (2.6) 中, ϕ_l^+ 和 ϕ_l^- 是分开求解的.

在方程 (2.6) 中, 作代换

$$|\mathbf{p}| = \frac{1+x}{1-x}, \quad p_4 = \frac{1+y}{1-y}, \quad (2.9)$$

将积分区间从 $(0, \infty)$, 变换到 $(-1, 1)$. 然后用高斯求积法把积分方程离散化, 该方程变为

$$\lambda^{-1} \chi_{ij}^\pm = h_{ij} \chi_{ij}^\pm + \sum_l \sum_m A_{ij,lm}^\pm \chi_{lm}^\pm, \quad (2.10)$$

$$A_{ij,lm}^\pm = \frac{2\sqrt{\omega_i \omega_j \omega_l \omega_m}}{(1-x_i)(1-y_j)(1-x_l)(1-y_m)} K_{ij,lm}^\pm,$$

$$\chi_{ij}^\pm = \frac{\sqrt{\omega_i \omega_j}}{(1-x_i)(1-y_j)} \phi_{ij}^\pm, \quad (2.11)$$

其中 ω_i 是高斯积分的权重. (2.10) 式被化成一个代数方程组, 我们用 DJS-8 计算机求解.

三、无自能图贡献时方程的解

为了将有自能图和没有自能图的解进行比较, 并试验所用的解法, 我们首先求解没有自能图的方程. 方程 (2.6) 中去掉自能图项 $h(p)$ 后, 得到一个标准的富雷德霍姆型的积分方程. 在其相应的 (2.10) 式中, 取 10 个高斯点, 求解 100×100 行列式的本征值和本征函数. 取参量 $\mu = 1, 0.1, 0.01, \eta = 0.0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.9, 0.99$, 对 $l = 0, 1$ 的 s 波和 p 波, 分别求出其对称的和反对称的基态和若干个激发态. $\mu = 1$ 时所得的本征值如表 1 所示. 表中的 λ_{ln}^\pm 是对应于对称、反对称波函数的轨道角动量为 l , 量子数为 n 的本征值,

表1 ($\mu = 1$)

η	0.0	0.2	0.4	0.6	0.9	0.99
$\lambda_{0,0}^+$	3.416	3.342	3.114	2.717	1.665	1.010
λ^*	3.419	3.344	3.115	2.718	1.665	1.014
$\lambda_{0,1}^+$	16.69	16.40	15.52	13.97	9.79	7.07
$\lambda_{0,2}^+$	45.02	44.44	42.67	39.41	29.72	23.04
$\lambda_{1,0}^+$	16.30	16.02	15.17	13.68	9.80	7.73
$\lambda_{1,1}^+$	46.18	45.57	43.51	39.89	30.43	25.05
$\lambda_{1,2}^+$	85.82	85.07	82.81	79.01	68.17	59.16
$\lambda_{0,0}^-$	16.33	16.20	15.80	15.12	13.51	12.87
$\lambda_{0,1}^-$	46.45	46.09	44.98	43.09	38.60	36.79
$\lambda_{1,0}^-$	73.82	72.97	70.35	65.60	51.71	42.21
$\lambda_{1,1}^-$	109.4	108.7	106.4	102.3	91.13	84.91

n 是从零开始按照本征值的大小依次编号的。

λ^* 是 Zur Linden^[3] 采用波函数的四维球谐函数展开, 求解联立的 32 个高斯点的一维积分方程所得的结果。从表 1 可以看出, λ^* 和我们算出的 $\lambda_{0,0}^+$ 符合到三位有效数字, 在文献[4]中, A. Pagnamenta 曾用 12 个高斯点求解方程 (2.10) (不取自能图) 的基态本征值, 求得 $\lambda_{0,0}^+ = 3.4182$, 与我们所取的 10 个高斯点的结果符合到三位有效数字。在文献[5]中, Schwartz 曾用变分法计算 $\lambda_{0,1}^+$ 、 $\lambda_{1,0}^+$ 和 $\lambda_{0,0}^-$ 的值, 可与表 1 中的有关值符合到三位有效数字。 $\mu = 0.1$ 和 0.01 时的本征值, 计算结果如表 2 和表 3 所示。从这些表中可以

表2 ($\mu = 0.1$)

η	0.0	0.2	0.4	0.6	0.9	0.99
$\lambda_{0,0}^+$	2.008	1.946	1.757	1.434	0.608	0.185
$\lambda_{0,1}^+$	6.04	5.85	5.28	4.31	1.86	0.63
$\lambda_{0,2}^+$	11.65	11.38	10.55	9.00	3.79	1.40
$\lambda_{1,0}^+$	5.95	5.76	5.20	4.22	1.82	0.61
$\lambda_{1,1}^+$	11.56	11.19	10.10	8.31	3.64	1.29
$\lambda_{1,2}^+$	17.60	17.30	16.38	13.59	6.35	2.42
$\lambda_{0,0}^-$	5.93	5.81	5.45	4.81	3.08	2.19
$\lambda_{0,1}^-$	11.55	11.31	10.59	9.29	5.69	3.95

表3 ($\mu = 0.01$)

η	0.0	0.2	0.4	0.6	0.9	0.99
$\lambda_{0,0}^+$	1.830	1.773	1.598	1.296	0.525	0.111
$\lambda_{0,1}^+$	4.88	4.72	4.24	3.42	1.31	0.22
$\lambda_{0,2}^+$	7.29	7.14	6.68	5.55	1.98	0.39
$\lambda_{1,0}^+$	4.68	4.53	4.06	3.26	1.24	0.23
$\lambda_{1,1}^+$	7.86	7.62	6.91	5.64	2.10	0.31
$\lambda_{1,2}^+$	9.02	8.83	8.28	7.08	2.51	0.56
$\lambda_{0,0}^-$	4.44	4.35	4.05	3.51	1.92	0.67
$\lambda_{0,1}^-$	7.45	7.29	6.77	5.74	2.86	0.88
$\lambda_{1,0}^-$	9.01	8.82	8.22	7.01	3.23	0.86

看出,对于同一个 η 值, λ 随着 μ 的减小而减小,它的谱随着 μ 的减小而变密. 在计算中,我们还把 10 个高斯点改成 8 个高斯点,用以验证数值计算的稳定性,并与上列各个文献中的有关结果相比较. 结果表明,表中所列的值对基态可以准到三位有效数,对激发态准到两至三位有效数.

四、有自能图贡献时方程的解

有自能图贡献时,需要求解方程 (2.10), 它与无自能修正的方程相比,多出下列对角项

$$h_{ij}\chi_{ij}^{\dagger},$$

仍取 10 个高斯点,算出的本征值 λ_{ij}^{\dagger} 分别见表 4、表 5 和表 6.

表 4 ($\mu = 1$)

η	0.0	0.2	0.4	0.6	0.9	0.99
$\lambda_{0,0}^{\dagger}$	2.282	2.262	2.196	2.053	1.484	0.97
$\lambda_{0,1}^{\dagger}$	2.39	2.39	2.39	2.39	2.39	2.39
$\lambda_{0,2}^{\dagger}$	2.40	2.40	2.40	2.40	2.40	2.40
$\lambda_{0,0}^{-}$	2.39	2.38	2.37	2.38	2.37	2.37
$\lambda_{1,0}^{-}$	2.39	2.39	2.39	2.39	2.39	2.39

表 5 ($\mu = 0.1$)

η	0.0	0.2	0.4	0.6	0.9	0.99
$\lambda_{0,0}^{\dagger}$	0.3317	0.3317	0.3317	0.3317	0.3312	0.1714
$\lambda_{0,1}^{\dagger}$	0.332	0.332	0.332	0.332	0.332	0.332

表 6 ($\mu = 0.01$)

η	0.0	0.2	0.4	0.6	0.9	0.99
$\lambda_{0,0}^{\dagger}$	0.1378	0.1378	0.1378	0.1378	0.1378	0.0889
$\lambda_{0,1}^{\dagger}$	0.1378	0.1378	0.1378	0.1378	0.1378	0.1378
$\lambda_{0,0}^{-}$	0.1378	0.1378	0.1378	0.1378	0.1378	0.1378
$\lambda_{0,1}^{-}$	0.1379	0.1379	0.1379	0.1379	0.1379	0.1379

从表中可以看出:

1. $\mu = 1$ 时,存在一个基态解. 它的本征值低于没有自能修正时的值. $\eta = 0$ 时差值为后者的 34%, 而当 $\eta \rightarrow 1$ 时差值减小,两者趋向同一个值. 说明在松束缚 ($\eta \sim 1$) 情况下,自能图贡献很小,这一点可从图 2 中看出.

2. $\mu = 1$ 时,反对称解以及对称的激发态解全都是简并的,且本征值与 η 无关. 计算结果表明,在这种情况下,方程 (2.10) 中有

$$\sum_{lm} A_{ij, lm}^{\dagger} \chi_{lm} \ll h_{ij} \chi_{ij},$$

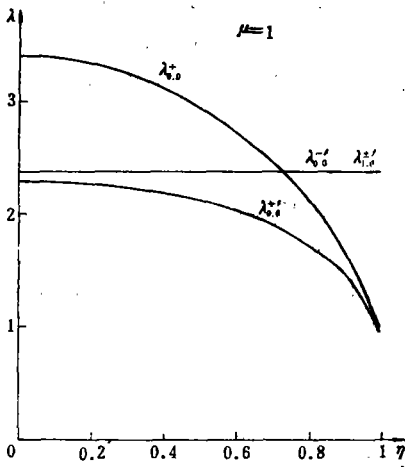


图 2

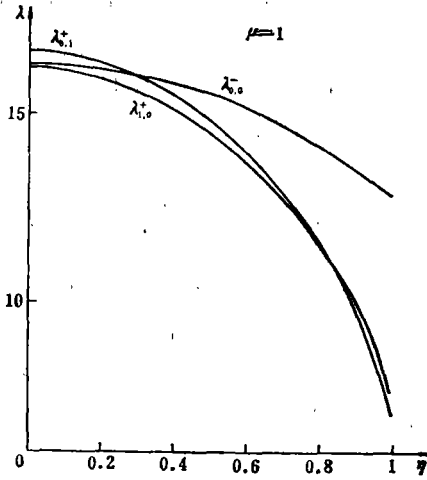


图 3

因而,这些本征值全由 h_{ij} 的最大值决定,它们当然也与 l 无关. 当 $\mu = 1$ 时, $(h_{ij})_{\max} = 0.417 = \lambda^{-1}$, 因而 $\lambda = 2.39$.

3. $\mu = 0.1$ 时, $\eta < 0.99$ 的基态本征值是一个常数, 即 $1/h_{\max}$. 只在很松的束缚下, $\eta = 0.99$ 时有另一个本征值. 反对称解及对称的激发态的本征值都是 $1/h_{\max}$. $\mu = 0.01$ 与 $\mu = 0.1$ 的情况类似, 只是相应的本征值更小一些.

以上的情况可用图 2, 3, 4, 5 表出. 从中可以看出考虑自能图与不考虑自能图差别很大.

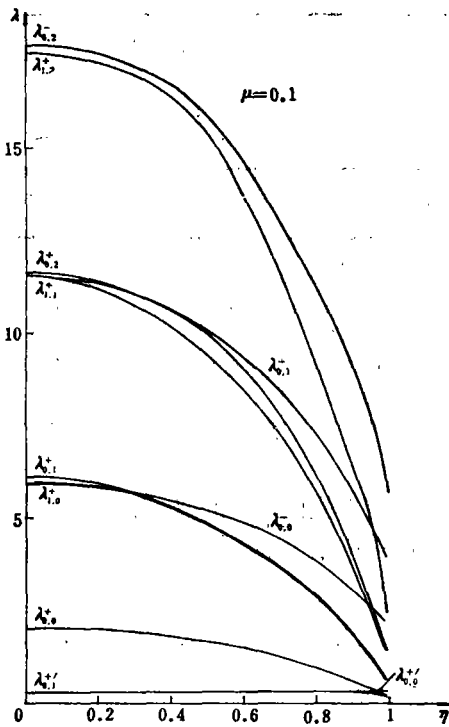


图 4

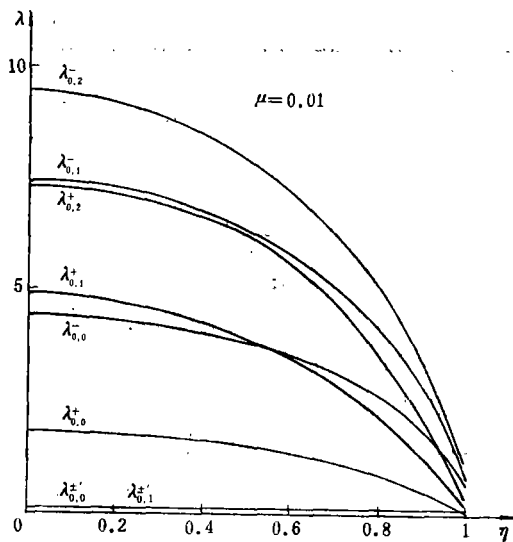


图 5

五、波 函 数

这一节中, 我们用图表出算得的 $\mu = 1$ 时 $\eta = 0$ 和 $\eta = 0.99$ 的基态对称波函数 $\phi_{0,0}^+(\mathbf{p}, p_4)$, 以及 $\mu = 1, \eta = 0$ 的反对称波函数 $\phi_{0,0}^-(\mathbf{p}, p_4)$. 包括无自能图以及有

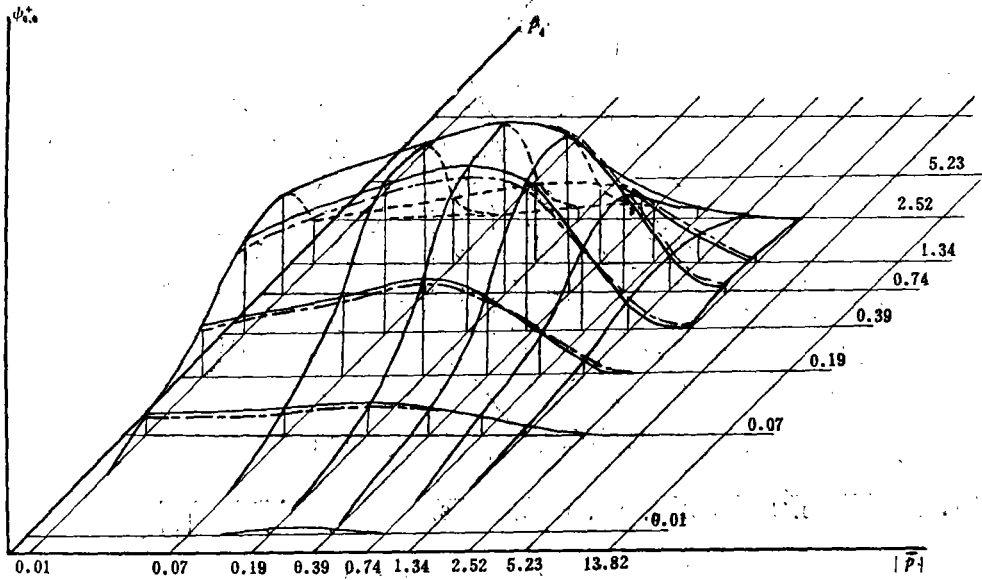


图 6 $\mu = 1, \eta = 0.0$ 的 $\phi_{0,0}^+(\mathbf{p}, p_4)$ 波函数及其自能修正(点划线)

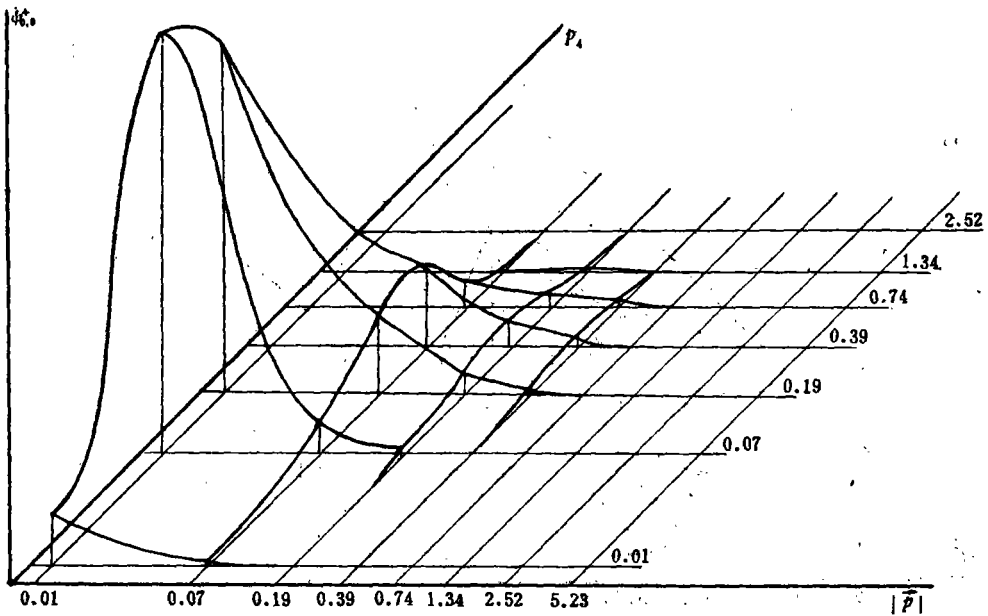


图 7 $\mu = 1, \eta = 0.99$ 的 $\phi_{0,0}^+(\mathbf{p}, p_4)$ 波函数

自能图修正两种情形。

1. 图6中的点划线表示经过自能修正后的 $\mu = 1, \eta = 0.0$ 的 $\psi_{0,0}^+$ 波函数, 这种修正使其本征值从 $\lambda_{0,0}^+ = 3.42$ 下降到 $\lambda'_{0,0}^+ = 2.28$, 但从图中可以看出, 波函数的修正却是很

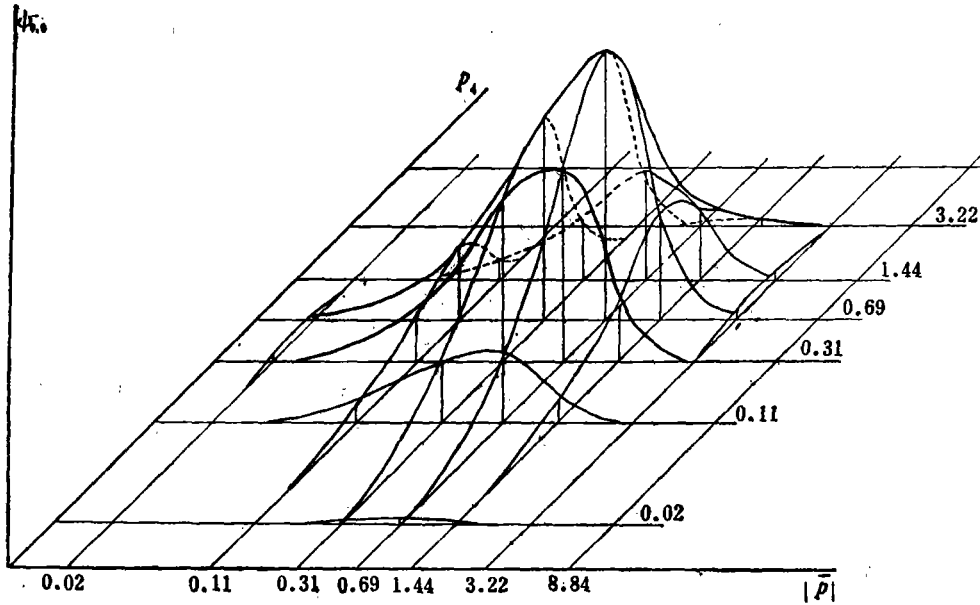


图8 $\mu = 1, \eta = 0.0$ 的 $\psi_{0,0}^+(|p|, p_4)$ 波函数

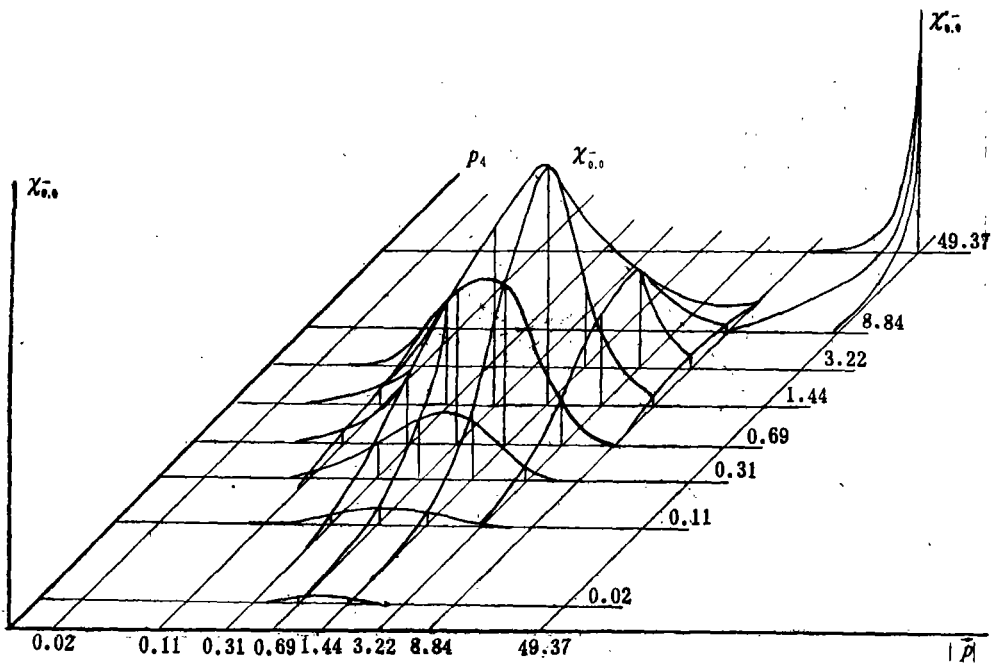


图9 $\mu = 1, \eta = 0.0$ 的 $X_{0,0}^-(|p|, p_4)$ 及其自能修正 $X'_{0,0}^-$

小的,这种修正并且随着 η 的增大而变小,在 $\eta = 0.99$ 的情形下(图 7),有自能修正的波函数 $\phi_{0,0}^+$ 和无自能修正的波函数 $\phi_{0,0}^-$ 相差极小,在图中无法区分。

2. 图 8 是 $\mu = 1, \eta = 0.0, \lambda_{0,0}^- = 16.33$ 的反对称波函数 $\phi_{0,0}^-$, 未加自能修正。这个图是用 8×8 个高斯点算出的,其图形与用 10×10 个高斯点算出的一致,说明我们的计算结果无论对本征值还是对本征函数都是稳定的。

3. 图 9 是由方程 (2.10) 直接解出的 $\lambda_{0,0}^- = 16.33$ 的本征矢 $\chi_{0,0}^-$, 它与图 8 中的 $\phi_{0,0}^-$ 波函数的关系见 (2.11) 式。计入自能修正后, $\chi_{0,0}^-$ 变成图 9 右上角的 δ 函数形式的解 $\chi_{0,0}^-$, 说明了自能图对反对称解(反常解)的巨大影响。

六、讨 论

从以上的计算结果可以看到:

1. 在梯形近似的方程中,加入同级的自能图以后,对解的影响是很大的。在许多情况下,特别是对非基态解和反常解,把梯形近似解的性质完全改变了。

2. 当 p_i 固定时,无自能图时基态解波函数的极大值在 $|\mathbf{p}| = 0$ 处(图 7), 因而其相应的位形空间的波函数是不振荡的; 而非基态解波函数的极大值不在 $|\mathbf{p}| = 0$ 处,且在 $|\mathbf{p}| = 0$ 处波函数为零(图 8), 因而其相应的位形空间波函数是振荡的。

3. λ 对 η 及 l 无关的解,它们的波函数集中在使 $h(p)$ 取最大值的点上(见图 9), 犹如 δ 函数,从它们在位形空间的图形看来,不可能是物理的束缚态解。对于 $\mu = 1$ 的情况,不论 η 如何,基态解是束缚态解。但对于 $\mu = 0.1$ 及 $\mu = 0.01$ 的情况,只有松束缚的条件下,基态解才是束缚态解。

4. 计算结果表明,对于上述的非束缚解,基本上由自能图的贡献 $h(p)$ 决定,由此可见自能图的重要性。

5. 没有自能图的方程是标准的富雷德霍姆型积分方程,但加入自能图后,就不再是这样的方程了。实际上,方程(2.5)可改写成

$$\{\lambda^{-1} - h(p)\}\phi(p) = \int K(p, p')\phi(p')d^2p',$$

其中 p 和 p' 定义在二维平面上。令

$$\chi(p) = \{\lambda^{-1} - h(p)\}^{1/2}\phi(p),$$

便得积分方程

$$\chi(p) = \int \frac{K(p, p')\chi(p')d^2p'}{\{(\lambda^{-1} - h(p))(\lambda^{-1} - h(p'))\}^{1/2}}.$$

数学研究所李炳仁同志证明,这样的方程在

$$\lambda^{-1} < h(p)_{\min}, \text{ 或 } \lambda^{-1} > h(p)_{\max}$$

时,有解存在。我们得到的解符合 $\lambda^{-1} > h(p)_{\max}$ 这一条件。

6. 对于紧束缚,方程的积分核是很复杂的。我们的工作企图说明,原有的梯形近似得到的结果不具有普遍的意义,也许只有在松束缚下才是好的近似。看来自能图的贡献是重要的,它将改变方程的数学性质。由于我们只取了 B-S 方程积分核中的两级图,因而除了

上述两点外,很难进一步得出有关紧束缚情况的有意义的结论.

最后,作者对数学所李炳仁同志的讨论表示感谢.

参 考 文 献

- [1] M. J. Levine, J. Wright, J. A. Tjon, *Phys. Rev.*, 154(1967), 1433.
- [2] M. J. Levine, J. Wright, J. A. Tjon, *Phys. Rev.*, 154(1967), 1416.
- [3] Zur Linden, *Mitter Nuovo Cimento*, 61B(1969), 389.
- [4] A. Pagnamenta, *Nuovo Cimento*, 53(1968), 30.
- [5] Schwartz, *Phys. Rev.*, 137(1965), B717.

THE INFLUENCE OF THE SELF-ENERGY DIAGRAMS ON THE SOLUTIONS OF A SCALAR BETHE- SALPETER EQUATION

LI BING-AN XIAN DING-CHANG

(Institute of High Energy Physics, Academia Sinica)

YAN SU CHEN TIAN-LUN YANG QING-ZHU LU JING-FA

(Nankai University)

ABSTRACT

The influence of the self-energy diagrams on the solutions of the Bethe-Salpeter equation is studied by taking a $g\phi_1^*(x)\phi_1(x)\phi_2(x)$ interaction and under the ladder approximation. The results show that for ground state solutions, the self-energy diagrams will diminish the eigenvalues and alter the wave functions slightly. While for the excited states and anti-symmetric solutions, the influence of the self-energy diagrams is considerable, which completely alters the properties of the solutions. The results also show that the solutions from the ladder approximation are meaningful only in the loosely bounded cases, and as the binding becomes tight, the contribution from the self-energy diagrams becomes important.