第3卷 第5期　　高能物理与核物理　　Vol. 3, No. 5
1979年9月　　PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS　　Sept., 1979

规范场的正则量子化(III)
——引力场

阎沐霖　鲍锡明　赵保恒
(中国科学技术大学)

提　要

本文在谐和条件下对引力场进行正则量子化. 我们把引力场分解成横场和两种自对易场, 研究了自对易场 χ_μ 的运动方程和自对易场对物理态之间的 S 矩阵元的贡献, 从而求得作用量中的规范补偿项. 我们的结果和用轨道积分方法求得的相同,但是我们的方法可以克服 Gribov 规范不确定性的困难.

一、引　言

在[1]中我们讨论了纯杨-Mills场和自发破缺规范场的正则量子化. 引力场也可以看成是一种非阿贝尔规范场,[1]的方法也适用于引力场. 本文讨论在谐和条件下引力场的正则量子化. 我们要解决的主要问题是确定作用量中的规范补偿项. 作用量中包含规范补偿项可以使理论有么正性.

Gupta 曾经讨论过在正则形式的量子引力理论中确定规范补偿项的问题[2]. 但是在他的理论中引入一个原拉氏量中没有的场 G_μ, G_μ 与原引力场之间的关系是不清楚的, 因此从包含 G_μ 的有效拉氏量是否能得到自对易场 χ_μ 的正确的运动方程是不清楚的. 在我们的理论中,把引力场分解成横场和两种自对易场. 其中一种自对易场相当于Gupta 的 G_μ. 由于弄清楚了两种自对易场和引力场的关系, 上述 Gupta 理论的缺点将自动消除. 我们的结果和轨道积分的结果一致,但是我们的方法可以克服 Gribov 规范不确定性在轨道积分方法中造成的困难.

文中所取的单位是 $\hbar = c = 1$, $\kappa^2 = 16\pi k$, k 是牛顿万有引力常数; 取 $x_4 = ix_0$, 在平坦时间-空间中度规张量为 $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\ (1, 1, 1, 1)$; 我们规定矢量的第四分量 $a_4 = ia_0$ 的厄米共轭为 $a_4^+ = ia_0^+$, i 的前面没有负号.

二、拉氏量和运动方程

我们研究纯引力场,它的拉氏量为

$$\mathscr{L}_G = \kappa^{-2}\sqrt{g}\ g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}, \tag{1}$$

本文1978年7月26日收到.

其中 $g=\det g_{\mu\nu}$，$R_{\mu\nu}=\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha}-\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha,\nu}+\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}-\Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}$. 对于无穷小规范变换

$$\left.\begin{aligned} g^{\mu\nu}\to g'^{\mu\nu}&=g^{\mu\nu}-\xi^{\alpha}\partial_{\alpha}g^{\mu\nu}+g^{\mu\alpha}\partial_{\alpha}\xi^{\nu}+g^{\nu\alpha}\partial_{\alpha}\xi^{\mu},\\ g_{\mu\nu}\to g'_{\mu\nu}&=g_{\mu\nu}-\xi^{\alpha}\partial_{\alpha}g_{\mu\nu}-g_{\mu\alpha}\partial_{\nu}\xi^{\alpha}-g_{\nu\alpha}\partial_{\mu}\xi^{\alpha}\\ \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\to\Gamma'^{\alpha}_{\mu\beta}&=\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}-\xi^{\lambda}\partial_{\lambda}\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}+\Gamma^{\lambda}_{\mu\beta}\partial_{\lambda}\xi^{\alpha}-\Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda}\partial_{\beta}\xi^{\lambda}\\ &\quad-\Gamma^{\alpha}_{\beta\lambda}\partial_{\mu}\xi^{\lambda}-\partial_{\mu}\partial_{\beta}\xi^{\alpha},\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

$\mathscr{L}_G$ 有不变性，在量子化时应当引进规范条件. 我们取谐和规范条件，在这种规范下拉氏量为

$$\mathscr{L}=\mathscr{L}_G+\kappa^{-1}\chi_{\mu}\partial_{\nu}\tilde{g}^{\mu\nu}+\frac{1}{2}\delta^{\mu\nu}\chi_{\mu}\chi_{\nu},\tag{3}$$

其中 χ_{μ} 是拉氏乘子场，$\tilde{g}^{\mu\nu}\equiv\sqrt{g}\,g^{\mu\nu}$. 在规范变换下

$$\tilde{g}^{\mu\nu}\to\tilde{g}'^{\mu\nu}=\tilde{g}^{\mu\nu}+\tilde{g}^{\mu\alpha}\partial_{\alpha}\xi^{\nu}+\tilde{g}^{\nu\alpha}\partial_{\alpha}\xi^{\mu}-\xi^{\alpha}\partial_{\alpha}\tilde{g}^{\mu\nu}-\partial_{\alpha}\xi^{\alpha}\tilde{g}^{\mu\nu}.\tag{2'}$$

分别对 χ_{μ}，$\tilde{g}^{\mu\nu}$，$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ 变分就得到运动方程:

$$\partial_{\nu}\tilde{g}^{\mu\nu}+\kappa\delta^{\mu\nu}\chi_{\nu}=0,\tag{4}$$

$$\frac{\delta}{\delta\tilde{g}^{\mu\nu}}S_G-\kappa^{-1}(\partial_{\mu}\chi_{\nu}+\partial_{\nu}\chi_{\mu})=0,\tag{5}$$

$$\frac{\delta}{\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}S_G=0.\tag{6}$$

其中 $S_G=\int d^4x\mathscr{L}$. 由于 S_G 是规范不变的，对它作规范变换就得到

$$G^{\mu\nu}_{\lambda}\frac{\delta}{\delta\tilde{g}^{\mu\nu}}S_G+G^{\alpha}_{\lambda\mu\nu}\frac{\delta}{\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}S_G=0,\tag{7}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} G^{\mu\nu}_{\lambda}&=\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_{\lambda}-2\delta^{\nu}_{\lambda}(\tilde{g}^{\mu\alpha}\partial_{\alpha}+\partial_{\alpha}\tilde{g}^{\mu\alpha})\\ G^{\alpha}_{\lambda\mu\nu}&=-\partial_{\lambda}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}+2(\partial_{\mu}\Gamma^{\alpha}_{\nu\lambda}+\Gamma^{\alpha}_{\nu\lambda}\partial_{\mu})\\ &\quad-\delta^{\alpha}_{\lambda}(\partial_{\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}+\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\partial_{\sigma})-\delta^{\alpha}_{\lambda}\partial_{\mu}\partial_{\nu}.\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

把(5)，(6)代入(7)就得到

$$G^{\mu\nu}_{\lambda}(\partial_{\mu}\chi_{\nu}-\partial_{\nu}\chi_{\mu})=0.\tag{9}$$

我们把 $\tilde{g}^{\mu\nu}$ 写成

$$\tilde{g}^{\mu\nu}=\delta^{\mu\nu}+\kappa\gamma^{\mu\nu}.\tag{10}$$

在本文中我们以 $\gamma^{\mu\nu}=\gamma^{\nu\mu}$ 作为基本场. 像通常的量子引力理论一样，我们把引力看成是平坦空间-时间中交换引力子引起的一种现象，因此以下用 $\gamma^{\mu\nu}$ 时不再区分上下指标.

由(4)和(10)我们有

$$\chi_{\mu}=-\gamma_{\mu\nu,\nu}.\tag{11}$$

其中 $\gamma_{\mu\nu,\nu}\equiv\partial_{\nu}\gamma_{\mu\nu}$. 把(10)代入(9)并用(11)可以得到 χ_{μ} 的运动方程

$$\Box\chi_{\mu}=-\kappa(\gamma_{\alpha\beta}\chi_{\mu,\alpha\beta}-\chi_{\alpha}\chi_{\mu,\alpha}-\chi_{\alpha}\chi_{\alpha,\mu}).\tag{12}$$

令　　$\tilde{g}_{\mu\nu}\equiv(g)^{-\frac{1}{2}}g_{\mu\nu}$，显然

$$\tilde{g}_{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}-\kappa\gamma_{\mu\nu}+\kappa^2\gamma_{\mu,\alpha}\gamma_{\alpha\nu}+O(\kappa^3).\tag{13}$$

$\mathscr{L}_G$ 可以用 $\tilde{g}^{\mu\nu}$ 和 $\tilde{g}_{\mu\nu}$ 表示[3]:

$$\mathscr{L}_G = \frac{1}{4\kappa^2}\Big(-\tilde{g}^{\mu\nu}\tilde{g}_{\alpha\beta}\tilde{g}_{\rho\sigma}\tilde{g}^{\alpha\rho}{}_{,\mu}\tilde{g}^{\beta\sigma}{}_{,\nu} + \frac{1}{2}\tilde{g}^{\mu\nu}\tilde{g}_{\alpha\beta}\tilde{g}_{\rho\sigma}\tilde{g}^{\alpha\beta}{}_{,\mu}\tilde{g}^{\rho\sigma}{}_{,\nu} + 2\,\tilde{g}_{\alpha\beta}\tilde{g}^{\alpha\nu}{}_{,\mu}\tilde{g}^{\beta\mu}{}_{,\nu}\Big). \tag{14}$$

把(11),(14)代入(3)并利用(10),(13)就可以把 $\mathscr{L}$ 写成

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_G - \frac{1}{2}(\gamma_{\mu\nu,\nu})^2 = \mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_I \tag{15}$$

其中 $-\frac{1}{2}(\gamma_{\mu\nu,\nu})^2$ 是规范固定项;

$$\mathscr{L}_0 = \frac{1}{8}\gamma_\mu^2 - \frac{1}{4}(\gamma_{\mu\alpha,\beta})^2, \tag{16}$$

$\gamma_\mu \equiv \gamma_{\alpha\alpha,\mu}$; $\mathscr{L}_I$ 有无限多按 κ 的幂展开的项,它们描写引力子间的相互作用,

$$\mathscr{L}_I = \sum_{n=1}^{\infty}\kappa^n \mathscr{L}_I^{(n)}. \tag{17}$$

其中最低幂的项为

$$\mathscr{L}_I^{(1)} = \frac{1}{8}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_{\mu\nu} - \frac{1}{4}\gamma_{\mu\nu}\gamma_{\mu\nu,\alpha}\gamma_\alpha + \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}\gamma_{\mu\beta,\alpha}\gamma_{\nu\beta,\alpha} - \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}\gamma_{\mu\alpha,\beta}\gamma_{\nu\beta,\alpha} - \frac{1}{4}\gamma_{\mu\nu}\gamma_{\alpha\beta,\mu}\gamma_{\alpha\beta,\nu}. \tag{18}$$

三、量 子 化

我们先对自由场量子化. 由(17)中的 $\mathscr{L}_0$ 可以得到和 $\gamma_{\mu\nu}$ 共轭的正则变量

$$\pi_{\mu\nu} = \frac{\partial\mathscr{L}_0}{\partial\gamma_{\mu\nu,0}} = \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu,0} - \frac{1}{4}\delta_{\mu\nu}\gamma_0. \tag{19}$$

取正则量子化条件:

$$\left.\begin{aligned}
&[\gamma_{\mu\nu}(\boldsymbol{x}, x_4), \pi_{\lambda\rho}(\boldsymbol{x}', x_4)] = \frac{1}{2}i(\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\rho} + \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\lambda})\delta^3(x - x'),\\
&[\gamma_{\mu\nu}(\boldsymbol{x}, x_4), \gamma_{\lambda\rho}(\boldsymbol{x}', x_4)] = [\pi_{\mu\nu}(\boldsymbol{x}, x_4), \pi_{\lambda\rho}(\boldsymbol{x}', x_4)] = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

由 $\mathscr{L}_0$ 可以得到

$$\Box\,\gamma_{\mu\nu} = 0. \tag{21}$$

所以有展开式

$$\left.\begin{aligned}
&\gamma_{\mu\nu}(x) = \sum_{\boldsymbol{k}}[a_{\mu\nu}(\boldsymbol{k})f_{\boldsymbol{k}}(x) + a^+_{\mu\nu}(\boldsymbol{k})f^*_{\boldsymbol{k}}(x)],\\
&f_{\boldsymbol{k}}(x) = e^{ikx}/\sqrt{2\omega V},\ \omega = |\boldsymbol{k}|.
\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

由(20)可以得到

$$\left.\begin{aligned}
&[a_{\mu\nu}(\boldsymbol{k}), a^+_{\lambda\rho}(\boldsymbol{k}')] = (\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\rho} + \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\lambda} - \delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\rho})\,\delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'},\\
&[a_{\mu\nu}(\boldsymbol{k}), a_{\lambda\rho}(\boldsymbol{k}')] = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

于是

$$\left.\begin{aligned}&[\gamma_{\mu\nu}(x),\ \gamma_{\lambda\rho}(y)]=i(\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\rho}+\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\lambda}-\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\rho}]\,D(x-y),\\&D(x)=\frac{-i}{(2\pi)^3}\int d^4k\,\varepsilon(k_0)\,\delta(k^2)\,e^{ikx}.\end{aligned}\right\}\tag{24}$$

把 $a_{\mu\nu}$ 重新组合，10 个独立的分量为

$$\left.\begin{aligned}&a^1=\frac{1}{\sqrt{8}}(a_{11}-a_{22})+\frac{1}{\sqrt{2}}a_{12},\quad a^2=\frac{1}{\sqrt{8}}(a_{11}-a_{22})-\frac{1}{\sqrt{2}}a_{12},\\&a^3=a_{13},\qquad a^4=a_{23},\\&a^5=\frac{1}{\sqrt{8}}(a_{11}+a_{22}-a_{33}+a_{00}),\quad a^6=\frac{1}{2}(a_{33}+a_{00}),\\&a^7=a_{10},\qquad a^8=a_{20},\\&a^9=a_{30},\qquad a^{10}=\frac{1}{\sqrt{8}}(a_{11}+a_{22}+a_{33}-a_{00}).\end{aligned}\right\}\tag{25}$$

其中 $a_{i4}=ia_{i0}$, $a_{44}=-a_{00}$. 于是由(23)有

$$[a^i(\boldsymbol{k}),\ a^j(\boldsymbol{k}')^+]=\begin{cases}0, & 当\ i\neq j\\ \delta_{\boldsymbol{kk}'}, & 当\ i=j=1,2,3,4,5,6\\ -\delta_{\boldsymbol{kk}'}, & 当\ i=j=7,8,9,10\end{cases}\tag{26}$$

可见 $i=1,\cdots,6$ 描写正度规引力子，$i=7,\cdots,10$ 描写负度规引力子.

由(25)我们有

$$a_{\mu\nu}(\boldsymbol{k})=\sum_{i=1}^{10}e^i_{\mu\nu}(\boldsymbol{k})\,a^i(\boldsymbol{k}).\tag{27}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&e^1_{\mu\nu}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&-1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad e^2_{\mu\nu}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\-1&-1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\\&e^3_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad e^4_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\\&e^5_{\mu\nu}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix},\quad e^6_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix},\\&e^7_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}0&0&0&i\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\i&0&0&0\end{pmatrix},\quad e^8_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&i\\0&0&0&0\\0&i&0&0\end{pmatrix},\end{aligned}\right\}\tag{28}$$

$$e^9_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad e^{10}_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

按照我们的规定 $a^+_{i4} = i a^+_{i0}$，因此

$$a^+_{\mu\nu}(\boldsymbol{k}) = \sum_{i=1}^{10} e^i_{\mu\nu}(\boldsymbol{k})\, a^i(\boldsymbol{k})^+, \tag{29}$$

于是(22)可以写成

$$\gamma_{\mu\nu}(x) = \sum_{\boldsymbol{k}, i} e^i_{\mu\nu}(\boldsymbol{k}) \left[a^i(\boldsymbol{k}) f_{\boldsymbol{k}}(x) + a^i(\boldsymbol{k})^+ f^*_{\boldsymbol{k}}(x) \right]. \tag{30}$$

$e^i_{\mu\nu}(\boldsymbol{k})$ 是动量 $\boldsymbol{k}$ 平行于 z 轴的引力子的极化张量．由于 $k_\mu e^1_{\mu\nu} = k_\mu e^2_{\mu\nu} = 0$，我们把 $i = 1, 2$ 对应的引力子称为横引力子．横引力子是自旋为 2，自旋在 $\boldsymbol{k}$ 方向分量为 ± 2 的迭加态．

把(30)代入(11)得到

$$\chi_\mu(x) = -i \sum_{\boldsymbol{k}} \omega \left[L_\mu(\boldsymbol{k}) f_{\boldsymbol{k}}(x) - L^+_\mu(\boldsymbol{k}) f^*_{\boldsymbol{k}}(x) \right], \tag{31}$$

其中

$$\left. \begin{aligned} L_\mu(\boldsymbol{k}) &= \sum_{i=3}^{10} \frac{1}{\omega} e^i_{\mu\nu}(\boldsymbol{k}) k_\nu a^i(\boldsymbol{k}) \\ &= \begin{cases} a^3(\boldsymbol{k}) - a^7(\boldsymbol{k}), & \text{当 } \mu = 1 \\ a^4(\boldsymbol{k}) - a^8(\boldsymbol{k}), & \text{当 } \mu = 2 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} [a^{10}(\boldsymbol{k}) - a^5(\boldsymbol{k})] - a^9(\boldsymbol{k}) + a^6(\boldsymbol{k}), & \text{当 } \mu = 3 \\ \dfrac{i}{\sqrt{2}} [a^{10}(\boldsymbol{k}) - a^5(\boldsymbol{k})] + i a^9(\boldsymbol{k}) - i a^6(\boldsymbol{k}), & \text{当 } \mu = 4 \end{cases} \end{aligned} \right\} \tag{32}$$

此外

$$L^+_\mu(\boldsymbol{k}) = \sum_{i=3}^{10} \frac{1}{\omega} e^i_{\mu\nu}(\boldsymbol{k}) k_\nu a^i(\boldsymbol{k})^+. \tag{32$'$}$$

注意把 L_4 中的 a^i 换成 a^{i+} 就得到 L^+_4，虚数 i 并不变号．容易验证

$$[L_\mu(\boldsymbol{k}), L_\nu(\boldsymbol{k}')] = [L_\mu(\boldsymbol{k}), L^+_\nu(\boldsymbol{k}')] = 0, \tag{33}$$

所以

$$[\chi_\mu(x), \chi_\nu(y)] = 0. \tag{34}$$

这说明 χ_μ 是自对易场．

(11)式说明 χ_μ 实质上是包含在 $\gamma_{\mu\nu}$ 内的，下面说明 $\gamma_{\mu\nu}$ 中还包含着另一种自对易场 χ'_μ．定义

$$\left.\begin{aligned}
M_\mu(\boldsymbol{k}) &= \begin{cases} \dfrac{1}{2}\ [a^3(\boldsymbol{k}) + a^7(\boldsymbol{k})], & \text{当 } \mu = 1 \\ \dfrac{1}{2}\ [a^4(\boldsymbol{k}) + a^8(\boldsymbol{k})], & \text{当 } \mu = 2 \\ -\dfrac{1}{\sqrt{8}}[a^{10}(\boldsymbol{k}) + a^5(\boldsymbol{k})] + \dfrac{1}{4}[a^9(\boldsymbol{k}) + a^6(\boldsymbol{k})], & \text{当 } \mu = 3 \\ \dfrac{i}{\sqrt{8}}[a^{10}(\boldsymbol{k}) + a^5(\boldsymbol{k})] + \dfrac{i}{4}[a^9(\boldsymbol{k}) + a^6(\boldsymbol{k})], & \text{当 } \mu = 4 \end{cases} \\
M_\mu^+(\boldsymbol{k}) &= \begin{cases} \dfrac{1}{2}\ [a^3(\boldsymbol{k})^+ + a^7(\boldsymbol{k})^+], & \text{当 } \mu = 1 \\ \dfrac{1}{2}\ [a^4(\boldsymbol{k})^+ + a^8(\boldsymbol{k})^+], & \text{当 } \mu = 2 \\ -\dfrac{1}{\sqrt{8}}[a^{10}(\boldsymbol{k})^+ + a^5(\boldsymbol{k})^+] + \dfrac{1}{4}[a^9(\boldsymbol{k})^+ + a^6(\boldsymbol{k})^+], & \text{当 } \mu = 3 \\ \dfrac{i}{\sqrt{8}}[a^{10}(\boldsymbol{k})^+ + a^5(\boldsymbol{k})^+] + \dfrac{i}{4}[a^9(\boldsymbol{k})^+ + a^6(\boldsymbol{k})^+], & \text{当 } \mu = 4 \end{cases}
\end{aligned}\right\} \tag{35}$$

容易验证

$$\left.\begin{aligned}
&[M_\mu(\boldsymbol{k}), M_\nu(\boldsymbol{k}')] = [M_\mu(\boldsymbol{k}), M_\nu^+(\boldsymbol{k}')] = 0, \\
&[M_\mu(\boldsymbol{k}), L_\nu^+(\boldsymbol{k}')] = [L_\mu(\boldsymbol{k}), M_\nu^+(\boldsymbol{k}')] = \delta_{\mu\nu}\,\delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'}.
\end{aligned}\right\} \tag{36}$$

定义

$$\chi'_\mu(x) = \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{-i}{\omega}[M_\mu(\boldsymbol{k}) f_{\boldsymbol{k}}(x) - M_\mu^+(\boldsymbol{k}) f_{\boldsymbol{k}}^*(x)]. \tag{37}$$

于是

$$[\chi'_\mu(x), \chi'_\nu(y)] = 0. \tag{38}$$

$$[\chi'_\mu(x), \chi_\nu(y)] = i\delta_{\mu\nu} D(x-y). \tag{39}$$

(38)说明 χ'_μ 是自对易场.

用 a^1, a^2, L_μ 和 M_μ 表示 $a_{\mu\nu}$, 可以得到 $\gamma_{\mu\nu}$ 的分解式(见附录 A):

$$\gamma_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu}^T + \partial_\mu\chi'_\nu + \partial_\nu\chi'_\mu - \delta_{\mu\nu}\partial_\lambda\chi'_\lambda - C_{\mu\nu}. \tag{40}$$

其中 $\gamma_{\mu\nu}^T$ 是 $\gamma_{\mu\nu}$ 中的横场部分:

$$\gamma_{\mu\nu}^T = \sum_{i=1,2} e_{\mu\nu}^i(\boldsymbol{k})\,[a^i(\boldsymbol{k}) f_{\boldsymbol{k}}(x) + a^i(\boldsymbol{k})^+ f_{\boldsymbol{k}}(x)]. \tag{41}$$

$C_{\mu\nu}$ 是和 L_μ 有关的部分:

$$C_{\mu\nu} = -\sum_{\substack{\boldsymbol{k} \\ \lambda=1,\cdots,4}} E_{\mu\nu}^\lambda(\boldsymbol{k})\,[L_\lambda(\boldsymbol{k}) f_{\boldsymbol{k}}(x) + L_\lambda^+(\boldsymbol{k}) f_{\boldsymbol{k}}^*(x)], \tag{42}$$

其中

$$E_{\mu\nu}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{\mu\nu}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{i}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{43}$$

$$E^3_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&\frac{3}{4}&-\frac{i}{4}\\0&0&-\frac{i}{4}&\frac{1}{4}\end{pmatrix},\quad E^4_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&-\frac{i}{4}&\frac{1}{4}\\0&0&\frac{1}{4}&-\frac{3}{4}i\end{pmatrix}.$$

易证

$$\partial_\nu C_{\mu\nu}=\chi_\mu. \tag{44}$$

我们强调指出 $\overline{\gamma^T_{\mu\nu}(x)\,\gamma^T_{\lambda\rho}}(y)\neq 0$, $\overline{\chi'_\mu(x)\,\chi_\nu}(y)\neq 0$. 但是

$$\overline{C_{\mu\nu}(x)\,C_{\lambda\rho}}(y)=0,\quad \overline{C_{\mu\nu}(x)\,\gamma^T_{\lambda\rho}}=0,\quad \chi_\mu\overline{(x)\,\chi_\nu}(y)=0,$$

$$\overline{\chi'_\mu(x)\,\chi'_\nu}(y)=0,\quad \overline{\chi'_\mu(x)\,\gamma^T_{\lambda\rho}}(y)=0,$$

我们用 χ_μ 的正频率部分定义物理态,

$$\chi^{(+)}_\mu(x)|\mathrm{phys}\rangle=0. \tag{45}$$

物理态 $|\mathrm{phys}\rangle$ 中只有横引力子和 $L^\pm_\mu$ 引起的规范激发.

现在考虑有相互作用的情形. (12)说明当 $\kappa\neq 0$ 时 χ_μ 不满足方程 $\Box\chi_\mu=0$. 这导致物理态条件破坏,因此物理态空间中的 S 矩阵不是么正的. χ_μ 和其他场的耦合是造成么正性破坏的原因. 在下一节中我们仔细分析 χ_μ 和其他场的相互作用,以期能找到恢复么正性的办法.

四、自对易场的有效拉氏量

当 $\kappa=0$ 时, χ_μ 和 χ'_μ 分别满足方程

$$\Box\,\chi_\mu=0,\qquad \Box\,\chi'_\mu=0. \tag{46}$$

结合对易关系(34),(38)和(39)立即看出 $\mathscr{L}_0$ 中包含 χ_μ 和 χ'_μ 的部分为

$$\mathscr{L}_\chi=-\chi'_{\mu,\nu}\chi_{\mu,\nu}. \tag{47}$$

这个式子也可以利用(40)从 $\mathscr{L}_0$ 中分离出来.

当 $\kappa\neq 0$ 时我们把 $\mathscr{L}$ 中包含 χ_μ, χ'_μ 场的部分记为

$$\mathscr{L}_\chi=-\chi'_{\mu,\nu}\chi_{\mu,\nu}+\mathscr{L}_{\chi I}. \tag{48}$$

$\mathscr{L}_{\chi I}$ 是 χ_μ 和 χ'_μ 的相互作用拉氏量. 由 χ_μ 满足的方程(12)我们知道 $\mathscr{L}_\chi$ 有如下的性质:

$$\frac{\delta}{\delta\chi'_\mu}\int d^4x\,\mathscr{L}_{\chi I}=\kappa(\gamma_{\alpha\beta}\chi_{\mu,\alpha\beta}-\chi_\alpha\chi_{\mu,\alpha}-\chi_\alpha\chi_{\alpha,\mu}). \tag{49}$$

现在把 $\mathscr{L}_\chi$ 改写成

$$\mathscr{L}_\chi=-\chi'_{\mu,\nu}\chi_{\mu,\nu}-\kappa(\gamma_{\mu\nu}\chi'_{\alpha,\mu}\chi_{\alpha,\nu}+\chi_\mu\chi'_\alpha\chi_{\mu,\alpha})+\mathscr{L}', \tag{50}$$

其中

$$\mathscr{L}'\equiv\mathscr{L}_{\chi I}+\kappa(\gamma_{\mu\nu}\chi'_{\alpha,\mu}\chi_{\alpha\nu}+\chi_\mu\chi'_\alpha\chi_{\mu,\alpha}). \tag{51}$$

把 $\mathscr{L}'$ 中的 χ'_μ 用 $\chi'_\mu+\chi^c_\mu$ 代替, χ^c_μ 是一个任意的经典场,同时保持(51)右边括号内

第一项中的 $\gamma_{\mu\nu}$ 不变，于是 $\mathscr{L}'$ 变成 $\mathscr{L}'_c$:

$$\mathscr{L}'_c = \mathscr{L}_{\chi I}|_{\chi'\to\chi'+\chi^c} + \kappa\,[\gamma_{\mu\nu}(\chi'_{\alpha,\mu} + \chi^c_{\alpha,\mu})\chi_{\alpha,\nu} + \chi_\mu(\chi'_\alpha + \chi^c_\alpha)\chi_{\mu,\alpha}]. \tag{52}$$

由(49)我们就有

$$\frac{\delta}{\delta\chi^c_\mu}\int d^4x\,\mathscr{L}'_c\Big|_{\chi^c=0} = 0. \tag{53}$$

现在考虑在相互作用表象中的 Feynman 规则. 如果忽略(51)右边括号内 $\gamma_{\mu\nu}$ 包含 χ'_μ 的性质，则(53)说明 $\mathscr{L}'$ 对应的顶角没有 χ'_μ 外线. 在附录 B 中我们将证明从 $\kappa\gamma_{\mu\nu}\chi'_{\alpha,\mu}\chi_{\alpha,\nu}$ 中的 $\gamma_{\mu\nu}$ 的确引不出 χ'_μ 线. 所以 $\mathscr{L}'$ 对应的顶角只有 χ_μ（或 $C_{\mu\nu}$）外线和 $\gamma^T_{\mu\nu}$ 外线；同时(50)右边括号内第一项对应的顶角也只有一条 χ'_μ 外线.

参考[1]中的讨论，我们便知道 $\mathscr{L}'$ 和(50)右边括号中第二项对物理态之间的 S 矩阵元没有贡献. 因此计算物理态之间的 S 矩阵元时可以取

$$\mathscr{L}_{\chi\text{eff}} = -\chi'_{\mu,\nu}\chi_{\mu,\nu} - \kappa\gamma_{\mu\nu}\chi'_{\alpha,\mu}\chi_{\alpha,\nu}. \tag{54}$$

略去对物理态之间的 S 矩阵元无贡献的项后，上式也可以写成

$$\mathscr{L}_{\chi\text{eff}} = -\chi'_{\mu,\nu}\chi_{\mu,\nu} + \kappa\gamma_{\mu\nu}\chi'_\alpha\chi_{\alpha,\mu\nu}. \tag{55}$$

注意在 Feynman 规则中上式右边第二项中的 $\gamma_{\mu\nu}$ 也不贡献 χ' 外线，并且(54)和(55)右边第二项中的 χ'_μ 和 χ_μ 必须收缩成封闭回路，否则对物理态之间的 S 矩阵元没有贡献.

五、规范补偿项

根据上面的讨论我们知道，计算物理态之间的 S 矩阵元时可以取

$$S = T\exp i\int d^4x\,(\mathscr{L}^T_I + \kappa\,\gamma_{\mu\nu}\chi'_\alpha\chi_{\alpha,\mu\nu}), \tag{56}$$

由于相互作用拉氏量中有二次微商，在上式指数上原则上还应当有和 $\delta^4(0)$ 成正比的项[4]，但是采用维数正常化时 $\delta^4(0)$ 可以认为等于零[5]，因此我们把这种项略去. $\mathscr{L}^T_I$ 是只包括 $\gamma^T_{\mu\nu}$ 的相互作用拉氏量. S 在物理态空间不么正，这是由相互作用 $\kappa\gamma_{\mu\nu}\chi'_\alpha\chi_{\alpha,\mu\nu}$ 引起的. 在编时算符后面 $\mathscr{L}^T_I$ 和 $\kappa\gamma_{\mu\nu}\chi'_\alpha\chi_{\alpha,\mu\nu}$ 是可对易的. 因此

$$S = T\exp i\int d^4x\,\mathscr{L}^T_I\exp i\kappa\int d^4x\,\gamma_{\mu\nu}\chi'_\alpha\chi_{\alpha,\mu\nu}. \tag{57}$$

在计算物理态之间的 S 矩阵元时，(57)右边第二个因子中的 χ'_μ 和 χ_μ 必须收缩成封闭的回路. 我们不妨先令 χ'_μ 和 χ_μ 收缩掉，看看这个因子的贡献怎样，为此我们计算

$$W = \langle 0|\,T\exp i\kappa\int d^4x\,\gamma_{\mu\nu}\chi_{\alpha,\mu\nu}\chi'_\alpha|0\rangle, \tag{58}$$

其中 $|0\rangle$ 是在"外场" $\gamma_{\mu\nu}$ 作用下 χ'_μ 和 χ_μ 的真空态.

$$\frac{\delta W}{\delta\gamma_{\mu\nu}(x)} = i\kappa\langle 0|\,T\,\chi_{\alpha,\mu\nu}(x)\,\chi'_\alpha(x)\exp i\kappa\int d^4x\,\gamma_{\mu\nu}\chi'_\lambda\chi_{\lambda,\mu\nu}|0\rangle. \tag{59}$$

令

$$\mathscr{D}_{\alpha\beta}(x,y) = \frac{1}{W}\langle 0|\,T\chi_\alpha(x)\,\chi'_\beta(y)\exp i\kappa\int d^4x\,\gamma_{\mu\nu}\chi'_\lambda\chi_{\lambda,\mu\nu}|0\rangle, \tag{60}$$

则

$$\frac{\delta W}{W} = i\kappa\int d^4x\,\delta\,\gamma_{\mu\nu}(x)\partial_\mu\partial_\nu\,\mathscr{D}_{\alpha\alpha}(x,x), \tag{61}$$

式中 $\partial_\mu\partial_\nu$ 作用于 $\mathscr{D}_{\alpha\alpha}(x,x)$ 中第一个 x.

$\mathscr{D}_{\mu\nu}(x,y)$ 满足方程

$$(\Box + \kappa\,\gamma_{\alpha\beta}\,\partial_\alpha\,\partial_\beta)\,\mathscr{D}_{\mu\nu}(x,y) = i\delta^4(x-y)\,\delta_{\mu\nu}. \tag{62}$$

此式可以用矩阵形式表示:

$$(\Box + \kappa\,\gamma_{\alpha\beta}\,\partial_\alpha\,\partial_\beta)\,\mathscr{D} = i\,1. \tag{63}$$

上式有形式解:

$$\mathscr{D} = i\,\Box^{-1}(1 + \kappa\,\gamma_{\alpha\beta}\,\partial_\alpha\,\partial_\beta\,\Box^{-1})^{-1}, \tag{64}$$

所以(61)可以写成

$$\frac{\delta W}{W} = \kappa\,T_r\,\delta\gamma_{\mu\nu}\,\partial_\mu\partial_\nu\mathscr{D} = -T_r\,\delta(1 + \kappa\gamma_{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\,\Box^{-1})(1 + \kappa\,\gamma_{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta\Box^{-1})^{-1}. \tag{65}$$

和 $\delta\log\det X = T_r\,\delta X\cdot X^{-1}$ 比较,并注意 $\kappa = 0$ 时 $W = 1$, 就得到

$$W = \exp\,[-T_r\log\,(1 + \kappa\,\gamma_{\alpha\beta}\,\partial_\alpha\partial_\beta\,\Box^{-1})]. \tag{66}$$

所以计算物理态之间的 S 矩阵元时可以取

$$S = T\exp\,i\left\{\int d^4x\,\mathscr{L}_I^T + i\,T_r\log\,(1 + \kappa\,\gamma_{\alpha\beta}\,\partial_\alpha\partial_\beta\,\Box^{-1})\right\}. \tag{67}$$

(67)指数上第二项导致物理态空间的 S 矩阵没有么正性. 如果把作用量 $A = \int d^4x\,\mathscr{L}$ 用

$$A_{\rm eff} = A - i\,T_r\log\,(1 + \kappa\,\gamma_{\alpha\beta}\,\partial_\alpha\,\partial_\beta\,\Box^{-1}) \tag{68}$$

替换掉,则(67)中的 S 变成

$$S = T\exp\,i\int d^4x\,\mathscr{L}_I^T. \tag{69}$$

S 矩阵中所有非物理引力子的贡献互相抵消,只剩下横引力子的贡献. 根据 Cutkosky 的切割规则[6], 物理态之间的 S 矩阵是么正的.

为了得到么正的 S 矩阵, 应当用(68)中的 $A_{\rm eff}$ 确定 Feynman 规则. (68) 右边第二项叫规范补偿项.

规范补偿项也可以用 Faddeev-Popov 鬼粒子表示. 令 c_μ 是服从 Fermi 统计的矢量场,在(54)中使 $\chi_\mu \to c_\mu$, $\chi'_\mu \to c^+_\mu$ 就得到规范补偿项:

$$\mathscr{L}_{FP} = -c^+_{\mu,\nu}\,c_{\mu,\nu} - \kappa\,\gamma_{\mu\nu}\,c^+_{\alpha,\mu}c_{\alpha,\nu}. \tag{70}$$

$\overline{c_\mu c^+_\nu}$ 和 $\overline{\chi_\mu \chi'_\nu}$ 一样,γc^+c顶角和 $\gamma\,\chi'\,\chi$ 顶角相似.但是 c 和 c^+ 收缩成封闭回路时有一个由 Fermi 统计引起的负号因子.计算物理态之间的 S 矩阵元时, 如果取 $\mathscr{L}_{\rm eff} = \mathscr{L} + \mathscr{L}_{FP}$, 考虑回路数给定的所有 Feynman 图, 由于 Faddeev-Popov 鬼粒子的每个封闭回路有一个负号因子, 因此所有包含 Faddeev-Popov 鬼粒子回路的图和包含 χ, χ' 回路的图的贡献互相抵消. 也就是说,当我们取 $\mathscr{L}_{\rm eff} = \mathscr{L} + \mathscr{L}_{FP}$ 计算物理态空间的 S 矩阵时, 可以把它写成(69)的形式.

按轨道积分方法得到的规范补偿项通常写成

$$\mathscr{L}_{FP} = -c^+_{\mu,\nu}\,c_{\mu,\nu} - \kappa\,(\gamma_{\mu\nu}\,c^+_{\alpha,\mu}\,c_{\alpha,\nu} - \gamma_{\mu\nu,\nu}\,c^+_{\mu,\alpha}\,c_\alpha). \tag{71}$$

其中 $\kappa\gamma_{\mu\nu,\nu}\,c^+_{\mu,\alpha}\,c_\alpha = -\kappa\,\chi_\mu\,c^+_{\mu,\alpha}c_\alpha$ 对物理态之间的 S 矩阵元没有贡献,所以实质上(70)

和(71)是一样的.

近来 Gribov 发现[7]，对于杨-Mills 场如果取 $\partial^\mu A^a_\mu=0$ 或 $\partial_i A^a_i=0$ 作为规范条件，则存在许多规范等价的 A^a_μ 和 A^a_i 分别满足上面二式，使 Faddeev 和 Popov 用轨道积分方法进行量子化的方法发生困难[8]. 在我们的量子化方法中也可能发生与 Gribov 规范不确定性有密切关系的困难，它表现为在 $\gamma_{\alpha\beta}$ 取某一类值时(63)中的微分算符 $(\Box+\kappa\,\gamma_{\alpha\beta}\,\partial_\alpha\,\partial_\beta)$ 可能无逆，从而使(63)—(69)的讨论失去意义. 但是上面关于 $\mathscr{L}_{\text{eff}}=\mathscr{L}+\mathscr{L}_{FP}$ 给出(69)的论证可以绕开 $(\Box+\gamma_{\alpha\beta}\,\partial_\alpha\,\partial_\beta)$ 是否有逆的问题. 用相同的方法可以克服纯杨-Mills 场和自发破缺规范场正则量子化中可能发生的类似困难[1]. 因此 Faddeev 和 Popov 用轨道积分求规范补偿项的方法虽然不对，但是从我们的正则量子化方法可以看出他们所得到的结果仍是正确的，即可以使物理态空间的 S 矩阵幺正化. 利用他们求出的有效拉氏量进行的各种微扰论计算仍是有意义的.

附 录 A　　证 明 (40) 式

由(25)，(32)和(35)可以解出

$$\left.\begin{aligned}
&a_{11}=\frac{1}{\sqrt{2}}(a^1+a^2)-(M_3+i\,M_4),\quad a_{12}=\frac{1}{\sqrt{2}}(a^1-a^2),\\
&a_{13}=\frac{1}{2}(L_1+2\,M_1),\quad a_{14}=-\frac{i}{2}\,L_1+i\,M_1,\\
&a_{22}=-\frac{1}{\sqrt{2}}(a^1+a^2)-(M_3+i\,M_4),\\
&a_{23}=\frac{1}{2}(L_2+2\,M_2),\quad a_{24}=-\frac{i}{2}\,L_2+i\,M_2,\\
&a_{33}=\frac{3}{4}\,L_3-\frac{i}{4}\,L_4+(M_3-i\,M_4),\\
&a_{34}=-\frac{i}{4}(L_3+i\,L_4)+i\,(M_3-i\,M_4),\\
&a_{44}=\frac{1}{4}\,L_3-\frac{3\,i}{4}\,L_4-(M_3-i\,M_4).
\end{aligned}\right\}\tag{A1}$$

把 (A 1) 代入(22)就得到

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_{\mu\nu}(x)=&\sum_{\substack{i=1,2\\ \boldsymbol{k}}} e^i_{\mu\nu}(\boldsymbol{k})\,[a^i(\boldsymbol{k})\,f_{\boldsymbol{k}}(x)+a^i(\boldsymbol{k})^+\,f^*_{\boldsymbol{k}}(x)]\\
&+\sum_{\substack{\lambda=1,\cdots,4\\ \boldsymbol{k}}} E^\lambda_{\mu\nu}(\boldsymbol{k})\,[L_\lambda(\boldsymbol{k})\,f_{\boldsymbol{k}}(x)+L^+_\lambda(\boldsymbol{k})\,f^*_{\boldsymbol{k}}(x)]\\
&+\sum_{\substack{\lambda=1,\cdots,4\\ \boldsymbol{k}}} H^\lambda_{\mu\nu}(\boldsymbol{k})\,[M_\lambda(\boldsymbol{k})\,f_{\boldsymbol{k}}(x)+M^+_\lambda(\boldsymbol{k})\,f^*_{\boldsymbol{k}}(x)\,].
\end{aligned}\right\}\tag{A2}$$

其中 $E^\lambda_{\mu\nu}$ 和 $H^\lambda_{\mu\nu}$ 可以由 (A 1) 求出. $E^\lambda_{\mu\nu}$ 见(43)式. $H^\lambda_{\mu\nu}$ 为

$$\left.\begin{aligned}&H^1_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}0&0&1&i\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\i&0&0&0\end{pmatrix},\quad H^2_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&i\\0&1&0&0\\0&i&0&0\end{pmatrix},\\&H^3_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&i\\0&0&i&-1\end{pmatrix},\quad H^4_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}-i&0&0&0\\0&-i&0&0\\0&0&-i&1\\0&0&1&i\end{pmatrix}.\end{aligned}\right\}\tag{A3}$$

定义

$$\left.\begin{aligned}\gamma^T_{\mu\nu}(x)&=\sum_{\substack{i=1,2\\ \boldsymbol{k}}}e^i_{\mu\nu}(\boldsymbol{k})\,[a^i(\boldsymbol{k})f_{\boldsymbol{k}}(x)+a^i(\boldsymbol{k})^+f^*_{\boldsymbol{k}}(x)],\\-C_{\mu\nu}(x)&=\sum_{\substack{\lambda=1,\cdots,4\\ \boldsymbol{k}}}E^\lambda_{\mu\nu}(\boldsymbol{k})\,[L_\lambda(\boldsymbol{k})f_{\boldsymbol{k}}(x)+L^+_\lambda(\boldsymbol{k})f^*_{\boldsymbol{k}}(x)],\\D_{\mu\nu}(x)&=\sum_{\substack{\lambda=1,\cdots,4\\ \boldsymbol{k}}}H^\lambda_{\mu\nu}(\boldsymbol{k})\,[M_\lambda(\boldsymbol{k})f_{\boldsymbol{k}}(x)+M^+_\lambda(\boldsymbol{k})f^*_{\boldsymbol{k}}(x)],\end{aligned}\right\}\tag{A4}$$

则有

$$\gamma_{\mu\nu}=\gamma^T_{\mu\nu}-C_{\mu\nu}+D_{\mu\nu}.\tag{A5}$$

注意到 $k_\mu=(0,0,\omega,i\omega)$ 以及 χ'_μ 的表示式(37),易见

$$D_{\mu\nu}=\partial_\mu\chi'_\nu+\partial_\nu\chi'_\mu-\delta_{\mu\nu}\partial_\lambda\chi'_\lambda.\tag{A6}$$

所以

$$\gamma_{\mu\nu}=\gamma^T_{\mu\nu}-C_{\mu\nu}+\partial_\mu\chi'_\nu+\partial_\nu\chi'_\mu-\delta_{\mu\nu}\partial_\lambda\chi'_\lambda.\tag{A7}$$

此即(40)式.

附录 B $\kappa\gamma_{\mu\nu}\chi'_{\alpha,\mu}\chi_{\alpha,\nu}$ 的 Feynman 规则

设 $\gamma_{\mu\nu}$ 是有相互作用的 Heisenberg 场,我们用 $\gamma^{(0)}_{\mu\nu}$ 表示它的 in 场. 根据(40)

$$\gamma^{(0)}_{\mu\nu}=\gamma^{T(0)}_{\mu\nu}-C^{(0)}_{\mu\nu}+\chi'^{(0)}_{\mu,\nu}+\chi'^{(0)}_{\nu,\mu}-\delta_{\mu\nu}\chi'^{(0)}_{\lambda,\lambda}.\tag{B1}$$

我们可以把 $\gamma_{\mu\nu}$ 写成

$$\gamma_{\mu\nu}=\gamma^{(0)}_{\mu\nu}+\Gamma_{\mu\nu},\tag{B2}$$

显然 $(\Gamma_{\mu\nu})_{\text{in}}\equiv\Gamma^{(0)}_{\mu\nu}=0$, 同样我们有

$$\left.\begin{aligned}\chi_\mu&=\chi^{(0)}_\mu+\Lambda_\mu,\\\chi'_\mu&=\chi'^{(0)}_\mu+\Lambda'_\mu.\end{aligned}\right\}\tag{B3}$$

其中 $\Lambda^{(0)}_\mu=\Lambda'^{(0)}_\mu=0$. $\chi^{(0)}_\mu$ 和 $\chi'^{(0)}_\mu$ 满足自由场方程

$$\chi^{(0)}_{\mu,\alpha\alpha}=0,\quad \chi'^{(0)}_{\mu,\alpha\alpha}=0.\tag{B4}$$

利用 (B2) 和 (B3) 可以得到

$$\kappa\gamma_{\mu\nu}\chi'_{\alpha,\mu}\chi_{\alpha,\nu}=\kappa\gamma^{(0)}_{\mu\nu}\chi'^{(0)}_{\alpha,\mu}\chi^{(0)}_{\alpha,\nu}+\mathscr{L}'',\tag{B5}$$

其中 $\mathscr{L}''$ 有性质 $\mathscr{L}''^{(0)}=0$. 因此 $\mathscr{L}''$ 对 $S=T\exp i\int d^4x\,\mathscr{L}^{(0)}_I$ 没有贡献.

利用 (B 1) 我们有

$$\gamma_{\mu\nu}^{(0)}\chi_{\alpha,\mu}^{\prime(0)}\chi_{\alpha,\nu}^{(0)}=(\gamma_{\mu\nu}^{T(0)}-C_{\mu\nu}^{(0)})\chi_{\alpha,\mu}^{\prime(0)}\chi_{\alpha,\nu}^{(0)}+\chi_{\mu,\nu}^{\prime(0)}\chi_{\alpha,\mu}^{\prime(0)}\chi_{\alpha,\nu}^{(0)}$$
$$+\chi_{\nu,\mu}^{\prime(0)}\chi_{\alpha,\mu}^{\prime(0)}\chi_{\alpha,\nu}^{(0)}-\chi_{\lambda,\lambda}^{\prime(0)}\chi_{\alpha,\mu}^{\prime(0)}\chi_{\alpha,\mu}^{(0)}. \tag{B6}$$

我们所关心的问题是，相互作用项 $\kappa\gamma_{\mu\nu}\chi'_{\alpha,\mu}\chi_{\alpha,\nu}$ 对应的 Feynman 规则中是否有从 $\gamma_{\mu\nu}$ 引出 χ' 线的顶角，因此 (B 6) 右边第一项不必考虑，其余三项可以写成

$$\chi_{\mu,\nu}^{\prime(0)}\chi_{\alpha,\mu}^{\prime(0)}\chi_{\alpha,\nu}^{(0)}=-\frac{1}{2}(\chi_{\mu}^{\prime(0)}\chi_{\alpha}^{(0)})_{,\mu}\chi_{\alpha,\nu\nu}^{(0)}$$
$$-\frac{1}{2}(\chi_{\mu}^{\prime(0)}\chi_{\alpha,\nu\nu}^{(0)}+\chi_{\mu,\nu\nu}^{\prime(0)}\chi_{\alpha}^{(0)})\chi_{\alpha,\mu}^{\prime(0)}+\text{散度项}, \tag{B7}$$

$$\chi_{\nu,\mu}^{\prime(0)}\chi_{\alpha,\mu}^{\prime(0)}\chi_{\alpha,\nu}^{(0)}=-\frac{1}{2}(\chi_{\nu}^{\prime(0)}\chi_{\alpha}^{\prime(0)})_{,\nu}\chi_{\alpha,\mu\mu}^{(0)}$$
$$-\frac{1}{2}(\chi_{\nu}^{\prime(0)}\chi_{\alpha,\mu\mu}^{\prime(0)}+\chi_{\nu,\mu\mu}^{\prime(0)}\chi_{\alpha}^{\prime(0)})\chi_{\alpha,\nu}^{(0)}+\text{散度项}, \tag{B8}$$

$$-\chi_{\lambda,\lambda}^{\prime(0)}\chi_{\alpha,\mu}^{\prime(0)}\chi_{\alpha,\mu}^{(0)}=\frac{1}{2}(\chi_{\alpha}^{\prime(0)}\chi_{\alpha}^{(0)})_{,\lambda}\chi_{\lambda,\mu\mu}^{\prime(0)}$$
$$+\frac{1}{2}(\chi_{\alpha,\mu\mu}^{\prime(0)}\chi_{\alpha}^{(0)}+\chi_{\alpha}^{\prime(0)}\chi_{\alpha,\mu\mu}^{(0)})\chi_{\lambda,\lambda}^{\prime(0)}+\text{散度项}. \tag{B9}$$

注意到 (B 4) 就知道这三项都是散度型的，因此可以从拉氏量中略去．于是 $\kappa\gamma_{\mu\nu}\chi'_{\alpha,\mu}\chi_{\alpha,\nu}$ 只贡献有一条 χ' 线的顶角，这条 χ' 线不是从 $\gamma_{\mu\nu}$ 中引出的．

参　考　文　献

[1] 赵保恒、阎沐霖，高能物理与核物理，**2** (1978), 501; **3**(1979), 52.
[2] S. N. Gupta, *Phys. Rev.*, **D14** (1976), 2596.
[3] J. N. Goldberg *Phys. Rev.*, **111** (1958), 315.
[4] 李政道、杨振宁, *Phys. Rev.*, **128** (1962), 885; I. S. Gerstein, R. Jackiw, B. W. Lee and S. Weinberg, *Phys. Rev.*, **D3** (1971), 2486.
[5] G. 't Hooft and M. Veltman, *Nucl. Phys.*, **B44** (1972), 189.
[6] R. E. Cutkosky, *J. Math. Phys.*, **1** (1960), 429;
G. 't Hooft and M. Veltman, ''Diagrammar'', CERN Report, 73-9 (1973);
[7] N. N. Gribov, *Nucl. Phys.*, **B139** (1978), 1.
[8] L. D. Faddeev and V. N. Popov, *Phys. Lett.*, **25B** (1967), 30.

CANONICAL QUANTIZATION OF GAUGE FIELDS (III) —GRAVITATIONAL FIELD

YAN MU-LIN BAO XI-MING ZHAO BAO-HENG
(*University of Science and Technology of China*)

ABSTRACT

The gravitational field is quantized within the canonical formalism under the harmonic gauge condition. The gravitational field is decomposed into transversal fields and self-commuting fields. The equation of motion of the self-commuting field χ_μ is derived, and the contributions of self-commuting fields to physical S-matrix elements are investigated. Then the gauge compensating term of the effective action is obtained. The result is in agreement with that obtained by the path integral method, but with our method the difficulty of the Gribov gauge ambiguity can be overcome.