第3卷 第5期 高能物理与核物理 Vol. 3, No. 5
1979年9月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS Sept., 1979

# KNO 标度性与平均标度性

王政之 墨文川
（山东大学）

**摘 要**

首先本文在玻色统计的基础上导出了 Polya 分布，并由此解释了高能多重产生的 KNO 标度性. 其次假定集团是经由多边缘 Regge 轨道交换而产生的并且服从一维的玻尔兹曼分布，由此分析了集团运动的性质并导出了半包含反应过程的平均标度性.

## 一、

为了统一地解释 KNO 标度性和 Wroblewski 经验规则，本文作者之一在黄山会议上曾提出一个多火球独立产生模型[1]，假定了每个火球中的粒子数服从指数分布. 这个假定实际上只有当粒子数很大时才近似地合理. 粒子数是离散的变量，而指数分布仅适用于连续变化的随机变量. 为了探寻 KNO 标度性的更合理的物理图象，有必要改进这个指数分布的假定.

实验发现高能碰撞中产生的强子绝大多数是 $\pi$ 介子，还有少量K介子. 其它的粒子是非常少的. 为了突出问题的主要方面，我们暂时只考虑 $\pi$ 介子. $\pi^-$ 介子是玻色粒子，其粒子数服从玻色分布

$$P(n) = \frac{1}{1+\bar{n}}\left(\frac{\bar{n}}{1+\bar{n}}\right)^n. \tag{1}$$

式中 $n$ 是 $\pi^-$ 介子的数目（以后只要不添加角标或专门声明，粒子数 $n$ 或 $K$ 均指负电荷的粒子），$\bar{n}$ 是一个火球里的平均 $\pi^-$ 介子数，$P(n)$ 是放出 $n$ 个 $\pi^-$ 介子的几率.

设此分布的母函数是 $G(z)$

$$G(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} z^n P(n) = \left[(1+\bar{n})\left(1-\frac{\bar{n}}{1+\bar{n}}z\right)\right]^{-1}. \tag{2}$$

如果有 $l$ 个火球统计独立地产生出来，把 $l$ 个火球放出 $n$ 个粒子的几率记为 $P_l(n)$，由概率论[2]可知，它的母函数 $G_l(z)$ 是 $G(z)$ 的 $l$ 次方，

$$G_l(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P_l(n) = [G(z)]^l. \tag{3}$$

借助于母函数技术不难求出 $P_l(n)$，

---

本文 1978 年 3 月 15 日收到.

$$P_l(n)=\left(\frac{1}{1+\bar{n}}\right)^l\left(\frac{\bar{n}}{1+\bar{n}}\right)^n\frac{\Gamma(l+n)}{\Gamma(l)\Gamma(n+1)}. \tag{4}$$

由于 $\bar{n}$ 是一个火球的平均 $\pi^-$ 介子数 $\bar{n}=\langle n\rangle/l$，上式可改写为

$$P_l(n)=\frac{l^l\langle n\rangle^n}{(l+\langle n\rangle)^{l+n}}\cdot\frac{\Gamma(l+n)}{\Gamma(l)\Gamma(n+1)}. \tag{5}$$

这就是 Polya 分布．当 $n\gg 1$ 而 $\frac{n}{\langle n\rangle}=t$ 固定时，它便导致 KNO 标度性

$$\langle n\rangle P_l(n)\to\frac{l^l}{\Gamma(l)}t^{l-1}\exp(-lt). \tag{6}$$

对于 $l=3$ 的情形，若以信度 0.05 来观察，只要 $n>3$，由 (5) 和 (6) 式算出的几率便相差无几．过去一般认为从相当低的能量就显现 KNO 标度性．而最近 CERN 的实验表明在质心系总能量 $\sqrt{s}=30.8$ GeV 以下时 KNO 标度性并不显现[3]，只有当 $\sqrt{s}\geqslant 45.2$ GeV 时才明显地出现．这时 $\langle n_{ch}\rangle=11.01\pm0.17$，$\langle n_-\rangle=4.50\pm0.08$ (pp 碰撞实验)．KNO 标度性显现的实验条件便可表述为 $\langle n\rangle\geqslant 4.5$，这恰好说明 KNO 标度性是粒子数较多时的渐近行为，它同上面的数学要求是一致的．

在大多数实验中测量的是带电粒子数 $n_{ch}$ 及其平均值 $\langle n_{ch}\rangle$．因此，为了同实验比较，还要把 (6) 中的自变量化为适当的形式．对于 pp 碰撞，由电荷守恒我们知道，$n_{ch}=2n+2$．借助于概率论中的关系式

$$\begin{cases}\text{若 } Y=aX+b \quad (X,\ Y \text{ 是随机变数})\\ \text{则 } P(y)=P(x)\big|_{x=\frac{y-b}{a}},\end{cases}$$

可由 (6) 式算出 $P_l(n_{ch})$

$$P_l(n_{ch})=\frac{2}{\langle n_{ch}\rangle-2}\cdot\frac{l^l}{\Gamma(l)}\left(\frac{n_{ch}-2}{\langle n_{ch}\rangle-2}\right)^{l-1}\exp\left[-l\left(\frac{n_{ch}-2}{\langle n_{ch}\rangle-2}\right)\right].$$

经过整理便得到

$$(\langle n_{ch}\rangle-2)P_l(n_{ch})=2\psi\left(\frac{n_{ch}-2}{\langle n_{ch}\rangle-2}\right). \tag{6$'$}$$

式中 $\psi(x)=\frac{l^l}{\Gamma(l)}x^{l-1}\exp(-lx)$．公式 (6′) 同 pp 碰撞实验资料符合得十分好．如果简单地把 $n$ 换成 $n_{ch}$，并且仍用 (6) 式，得到的结果在 $n_{ch}/\langle n_{ch}\rangle$ 大时同实验资料有明显的偏离[4]．公式 (6′) 中标度函数 $\psi$ 前面的系数 2 在我们这儿是自动出现的，不必生硬地加上去[3]．

从上面的讨论我们看到，Polya 分布的物理背景是多火球统计独立地产生和火球中的粒子服从玻色统计的要求，当 $n/\langle n\rangle$ 固定而 $n$ 足够大时其渐近分布呈现 KNO 标度性．

为了符合实验资料，必须令 $l=3$，它说明产生的粒子群中有三个统计独立的部分(我们暂且称之为火球)．为什么恰好是3? 尚待理论上进一步探究．

## 二、

在文献 [1] 中曾经提出高能多粒子产生过程也是可分的，可能有几个层次：大火球

——小集团——粒子．所谓大火球，指的是上面所说的那种相互独立的统计集合体．小集团是带电粒子数较少（$\langle n_{ch}\rangle$ 约为 2）的粒子集合体．为了弄清集团的性质及其在多重产生过程中所起的作用，我们着重考察快度中心区．因为随着碰撞能量的升高，碎裂区衍射激发的效应愈来愈小，次级粒子大部分来自中心区．

假设 I：集团是经由多边缘 Regge 轨道交换而产生的有一定质量的不稳定实体，它按量子统计的规律放出粒子．

这儿交换的 Regge 轨道主要是非 Pomeron 型的真空轨道，因为 Pomeranchuk 轨道是与衍射激发相对应的．由一般的多边缘产生理论[7]我们知道，这样产生的集团，横向运动很小，在一级近似中可以忽略．集团数 $N_c$ 服从泊松分布．这是一种经典统计．因而我们进一步提出

假设 II：集团数 $N_c$ 随动量的分布是一种一维的玻尔兹曼分布

$$dN_c = \frac{\bar{N}_c}{2MK_1\left(\frac{M}{T}\right)} e^{-E_c/T}\delta(P_{c\perp}^2)dP_{c\perp}^2 dP_{c\parallel}. \tag{7}$$

式中 $M$ 是集团的质量，$E_c$ 是它的能量，$P_{c\perp}$ 和 $P_{c\parallel}$ 分别代表集团的横动量和纵动量．(7) 式中前边的系数是归一化因子．式中出现 $\delta(P_{c\perp}^2)$ 是完全忽略集团横向运动的结果，它突出了集团整体运动的主要特征——纵向运动为主．当然，在更细微的模型中应当计及集团横向运动的效应．

对横动量积分，(7) 式变为

$$dN_c = \frac{\bar{N}_c}{2MK_1\left(\frac{M}{T}\right)} \exp\left(-\frac{\sqrt{M^2+P_{c\parallel}^2}}{T}\right) dP_{c\parallel}. \tag{8}$$

考虑到能量守恒的限制

$$\int E_c\left(\frac{dN_c}{dP_{c\perp}^2 dP_{c\parallel}}\right) dP_{c\perp}^2 dP_{c\parallel} = W,$$

我们得到关系式

$$\frac{T\bar{N}_c}{2K_1\left(\frac{M}{T}\right)}\left[K_1\left(\frac{M}{T}\right)+\frac{M}{T}K_0\left(\frac{M}{T}\right)\right] = W.$$

式中 $W$ 是产生的集团的总能量．当 $M/T\to 0$ 时，

$$T \to 2W\sqrt{N_c} \tag{9}$$

这个温度 $T$ 决定了集团数的分布．从 (9) 式可以看出，总能量愈大，温度 $T$ 愈高．

另一方面，集团数 $N_c$ 的分布还可表示为

$$dN_c = \frac{V}{(2\pi)^3} e^{-E_c/T}\delta(P_{c\perp}^2)dP_{cx}dP_{cy}dP_{c\parallel},$$

同 (8) 式比较，立即得出

$$V = \frac{(2\pi)^2\bar{N}_c}{MK_1\left(\frac{M}{T}\right)} \xrightarrow[\frac{M}{T}\to 0]{} (2\pi)^2\frac{\bar{N}_c}{T}.$$

考虑到关系式 (9)，消去 $T$，则 $V$ 可写为

$$V \to (2\pi)^2 \frac{\bar{N}_c^2}{W} \propto \frac{(\ln s)^2}{\sqrt{s}}. \tag{10}$$

这里 $\bar{N}_c \propto \ln s$，是多边缘机制的结果．从物理图象上看，如果把因子 $1/\sqrt{s}$ 看作洛仑兹收缩的效应，则 $(\ln s)^2$ 便可看作横向截面的膨胀，即

$$\sigma_{\text{in}} \propto (\ln s)^2. \tag{11}$$

它同目前高能碰撞的实验结果是一致的．

从一个集团的静止系来看，集团产生出来之后，各向同性地膨胀，当达到某个转变温度 $T_c$（$T_c$ 与玻米兰楚克温度、哈格栋温度相当）和体积 $V_c$ 时，集团按照量子统计的规律放出介子．放出的介子服从玻色统计，其一般形式为

$$E\frac{dk}{d\mathbf{p}} = \frac{g}{(2\pi)^3} \cdot \frac{EV_c}{\exp(\beta_\mu p_\mu) - 1}. \tag{12}$$

式中 $p_\mu = (E, \mathbf{p})$ 是粒子的四动量，$g$ 量粒子的统计权重，$\beta_\mu = (\beta_0, \boldsymbol{\beta})$，$\beta_0 = \frac{E_c}{MT_c}$，$\boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{p}_c}{MT_c}$．

引入集团快度 $y_c$ 和粒子快度 $y$

$$E_c = M_\perp \operatorname{ch} y_c, \qquad E = m_\perp \operatorname{ch} y.$$

这儿 $M_\perp = \sqrt{M^2 + P_{c\perp}^2}$，$m_\perp = \sqrt{m^2 + p_\perp^2}$．略去集团的横向运动（多边缘机制的结果），我们可将 $\beta_\mu p_\mu$ 写成

$$\beta_\mu p_\mu \approx m_\perp \operatorname{ch}(y - y_c)/T_c.$$

将它代入 (12) 式并对 $p_\perp$ 积分，我们得到

$$\frac{dk}{dy} = \frac{2\zeta(3)}{(2\pi)^3} \frac{gV_cT_c^3}{\operatorname{ch}^2(y - y_c)} - \frac{gV_cT_cm^2}{2(2\pi)^2} D\left(\frac{m \operatorname{ch}(y - y_c)}{T_c}\right). \tag{13}$$

式中 $\zeta(3)$ 是宗量为了的黎曼函数，$D(x) = \frac{2}{x^2}\int_0^x \frac{z^2dz}{e^z - 1}$．由于当 $|y - y_c| \gg 1$ 时，

$$\operatorname{ch}^2(y - y_c) \to 0, \qquad D\left(\frac{m \operatorname{ch}(y - y_c)}{T_c}\right) \to 0,$$

所以只有当 $|y - y_c|$ 较小时 $dk/dy$ 才异于零．从快度空间看，粒子聚集在 $y = y_c$ 附近，确实聚成一团，而且集团的性质同总能量 $\sqrt{s}$ 没有明显的关系．这些结论在通常的集团理论中是作为假设被引进的[5]．但是三个大火球同这些小集团有什么关系尚不清楚，有待进一步探究．

## 三、

让我们用上面的模型来分析一下末态带电粒子数固定的半包含 (Semi-inclusive) 反应．

对于带电粒子数的快度分布，我们有

$$\frac{dn_{\text{ch}}}{dy} = \int \frac{dN_c}{dy_c} \cdot \frac{dk_{\text{ch}}}{dy} dy_c.$$

式中的 $dN_c/dy_c$ 由 (8) 式的变形而确定

$$\frac{dN_c}{dy_c}=\frac{N_c}{2K_1\left(\frac{M}{T}\right)}\operatorname{ch}y_c\cdot\exp\left(-\frac{M}{T}\operatorname{ch}y_c\right).$$

由于 $dk_{ch}/dy$ 仅当 $y\approx y_c$ 时才显著异于零，因而

$$\frac{dn_{ch}}{dy}=\frac{N_c\bar{k}_{ch}}{2K_1\left(\frac{M}{T}\right)}\operatorname{ch}y\cdot\exp\left(-\frac{M}{T}\operatorname{ch}y\right).\tag{14}$$

另一方面

$$n_{ch}=N_c\bar{k}_{ch},\qquad m_\perp\operatorname{ch}y=\sqrt{m_\perp^2+p_{/\!/}^2},$$

所以 (14) 式可变为

$$\frac{1}{n_{ch}}\cdot\frac{dn_{ch}}{dp_{/\!/}}=\frac{1}{2m_\perp K_1\left(\frac{M}{T}\right)}\exp\left(-\frac{M}{m_\perp T}\sqrt{m_\perp^2+p_{/\!/}^2}\right).$$

当 $p_{/\!/}^2\gg m_\perp^2$，$M/T\rightarrow 0$ 时，上式变成

$$\frac{T}{n_{ch}}\cdot\frac{dn_{ch}}{dp_{/\!/}}=\frac{M}{2m_\perp}\exp\left(-\frac{M}{m_\perp T}\sqrt{p_{/\!/}^2}\right).$$

式中的 $p_{/\!/}$ 是可正可负的。如果我们仅考察对 $p_{/\!/}$ 绝对值的分布，则有

$$\frac{T}{n_{ch}}\cdot\frac{dn_{ch}}{dp_{/\!/}}=\frac{M}{m_\perp}\exp\left(-\frac{M}{m_\perp T}p_{/\!/}\right),\quad p_{/\!/}\geqslant 0.\tag{15}$$

引入 $\langle p_{/\!/}\rangle_n$

$$\langle p_{/\!/}\rangle_n\equiv\int_0^\infty p_{/\!/}\left(\frac{1}{n_{ch}}\cdot\frac{dn_{ch}}{dp_{/\!/}}\right)dp_{/\!/}=\frac{\frac{m_\perp}{M}T}{\frac{M}{T}K_1\left(\frac{M}{T}\right)}\xrightarrow[\frac{M}{T}\rightarrow 0]{}\frac{m_\perp}{M}T.$$

于是可将 (15) 化为常见的形式

$$\frac{\langle p_{/\!/}\rangle_n}{n_{ch}}\frac{dn_{ch}}{dp_{/\!/}}=\frac{\langle p_{/\!/}\rangle_n}{n_{ch}\sigma_n}\frac{d\sigma_n}{dp_{/\!/}}\approx\exp\left(-\frac{p_{/\!/}}{\langle p_{/\!/}\rangle_n}\right),\quad p_{/\!/}\geqslant 0.\tag{16}$$

这就是纵动量分布的平均标度性[6]，它同实验结果是一致的。

由于在半包含反应中 $T=2W/N_c$，因此当 $M$ 是常数时便会观察到

$$\langle p_{/\!/}\rangle_n\propto\sqrt{s}/n_{ch}.\tag{17}$$

CERN ISR 的实验证实了这种行为[3]。

在这里我们强调指出，平均标度性的出现，自然导致在 $p_{/\!/}\rightarrow 0$ 的中心区域费曼标度性的破坏。

由于多边缘机制，集团的横向运动可以忽略，因此在半包含化应中次级粒子的横动量分布能够表述为

$$\begin{aligned}\frac{dn_{ch}}{\pi dp_\perp^2}&=N_c\frac{dk_{ch}}{\pi dp_\perp^2}=\frac{N_c gV_c}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{m_\perp\operatorname{ch}y\,dy}{\exp(m_\perp\operatorname{ch}y/T_c)-1}\\&=\frac{N_c\bar{k}_{ch}}{2\pi}\frac{1}{T_c^3F(m/T_c)}\int_0^\infty\frac{m_\perp\operatorname{ch}y\,dy}{\exp(m_\perp\operatorname{ch}y/T)-1},\end{aligned}$$

或者写成

$$\frac{1}{n_{ch}}\cdot\frac{dn_{ch}}{dm_\perp}=\frac{m_\perp}{T_c^3F(m/T_c)}\int_0^\infty\frac{m_\perp \operatorname{ch} y dy}{\exp(m_\perp \operatorname{ch} y/T_c)-1}. \tag{18}$$

由此进而算出 $\langle m_\perp\rangle_n$,

$$\langle m_\perp\rangle_n=\frac{\pi T_c}{4F(m/T_c)}\left[\Gamma(4)\zeta(4)-\frac{4}{3}\left(\frac{m}{T_c}\right)^3\int_0^\infty D_3\left(\frac{m}{T_c}\operatorname{ch} y\right)dy\right]=bT_c. \tag{19}$$

式中 $D_3(x)=\frac{3}{x^3}\int_0^x\frac{z^3dz}{e^z-1}$. 如果我们取 $m=m_\pi=140\text{ MeV}$, $T_c=160\text{ MeV}$,

$$\int_0^\infty D_3\left(\frac{m}{T_c}\operatorname{ch} y\right)dy\approx 1.2\,D_3\left(\frac{m}{T_c}\right),$$

则由(19)式可算得

$$b\approx 2.40. \tag{20}$$

当 $m_\perp\gg T_c$ 时,可用玻尔兹曼近似,(18)式化为

$$\begin{aligned}\frac{1}{n_{ch}}\cdot\frac{dn_{ch}}{dm_\perp}&=\frac{m_\perp^2}{T_c^3F(m/T_c)}K_1\left(\frac{m_\perp}{T_c}\right)\\ &\xrightarrow[\frac{m_\perp}{T_c}\gg 1]{}\frac{1}{T_cF\left(\frac{m}{T_c}\right)}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{m_\perp}{T_c}\right)^{\frac{3}{2}}\exp(-m_\perp/T_c).\end{aligned} \tag{21}$$

利用(19)式将 $T_c$ 换成 $\langle m_\perp\rangle_n/b$, 最后得到

$$\frac{\langle m_\perp\rangle_n}{n_{ch}}\cdot\frac{dn_{ch}}{dm_\perp}=\frac{\langle m_\perp\rangle_n}{n_{ch}\sigma_n}\frac{d\sigma_n}{dm_\perp}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{b^{\frac{5}{2}}}{F\left(\frac{m}{T_c}\right)}\left(\frac{m_\perp}{\langle m_\perp\rangle_n}\right)^{\frac{3}{2}}\exp\left(-b\frac{m_\perp}{\langle m_\perp\rangle_n}\right). \tag{22}$$

这就是对纵质量 $m_\perp$ 分布的平均标度性. 当 $p_\perp\gg m$ 时,(22)式化为对横动量分布的平均标度性

$$\frac{\langle p_\perp\rangle_n}{n_{ch}\sigma_n}\frac{d\sigma_n}{dp_\perp}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{b^{\frac{5}{2}}}{F\left(\frac{m}{T_c}\right)}\left(\frac{p_\perp}{\langle p_\perp\rangle_n}\right)^{\frac{3}{2}}\exp\left(-b\frac{p_\perp}{\langle p_\perp\rangle_n}\right). \tag{23}$$

如果仍只考察 $\pi$ 介子,且取 $m=140\text{MeV}$, $T_c=160\text{MeV}$, 则(23)式可写为

$$\frac{\langle p_\perp\rangle_n}{n_{ch}\sigma_n}\frac{d\sigma_n}{dp_\perp}\approx 5\left(\frac{p_\perp}{\langle p_\perp\rangle_n}\right)^{\frac{3}{2}}\exp\left(-2.40\frac{p_\perp}{\langle p_\perp\rangle_n}\right). \tag{24}$$

实验上测得的经验关系是[6]

$$\frac{\langle p_\perp\rangle_n}{n_{ch}\sigma_n}\frac{d\sigma_n}{dp_\perp}=\alpha\left(\frac{p_\perp}{\langle p_\perp\rangle_n}\right)^{\beta}\exp\left(-\gamma\frac{p_\perp}{\langle p_\perp\rangle_n}\right),$$

其中

$$\alpha=6.23\pm0.52,\quad \beta=1.37\pm0.03,\quad \gamma=2.37\pm0.04,$$

理论与实验基本符合.

从(16)和(24)的推导过程可以看出,平均标度性的起因主要是:(1)集团的多边缘产生(从而可忽略其横动量),(2)集团数服从玻尔兹曼分布,(3)集团质量有限而总能量很高(从而温度 $T$ 很高, $M/T\to 0$),(4)集团按量子统计的规律放出粒子. 平均标度性是上述集团模型的自然结果.

## 参　考　文　献

[1] 王政之，高能物理与核物理，**1** (1977) 90.
[2] W. Feller, An Introduction to Probability Theory and Its Applications, New York and London, 1950.
[3] W. Thomé et al., *Nucl. Phys.*, **B129** (1977) 365.
[4] W. Ernst and I. Schmitt, *Nuo. Cim.*, **31A** (1976), 109; 120.
[5] L. Foá, *Phys. Reports.*, **22C** (1975), 3.
J. Ranft, *Forts. Physik.*, **23** (1975), 467.
F. Hayot and M. Le Bellac, *Nucl. Phys.*, **B86** (1975), 333.
[6] F. T. Dao et al., *Phys. Rev. Lett.*, **33** (1974), 389.
W. Ernst and I. Schmitt, *Nuo. Cim.*, **41A** (1977), 217.
R. J. Yaes, *Phys. Rev.*, **D15** (1977), 2627.
[7] S. Humble, Introduction to Particle Production in Hadron Physics, 1974, London and New York.
И. В. Андреев, И. М. Дремин, *УФН*, **122** (1977), 37.

# KNO SCALING AND SCALING IN THE MEAN

WANG ZHENG-ZHI　　MO WEN-CHUAN
(*Shandong University*)

ABSTRACT

In the first place in the paper Polya distribution has been derived from Bose statistics, then using it, KNO scaling in multiparticle production at high energies is explained. Secondly it is assumed that the clusters are produced via multiperipheral exchange of Regge trajectory and the cluster number obeys one-dimensional Boltzmann distribution. Then the properties of cluster's movement is analysed and scaling in the mean in semi-inclusive process is deduced.