

# 光生相对论的 $(\mu^+\mu^-)$ , $(e^+e^-)$ 仲原子

何炬 张肇西

(中国科学院高能物理研究所)

何祚庥

(中国科学院理论物理研究所)

## 摘 要

本文应用复合场论微扰展开式和相对论的 B-S 近似波函数, 计算了类似于 Primakoff 效应的光生相对论的  $(e^+e^-)$ ,  $(\mu^+\mu^-)$  仲原子的过程。结果与通常点模型的计算结果不同, 这里多得出了一个新的形状因子。这表明在通常的 Primakoff 效应中也将存在类似的修正。

在我们以前工作中, 曾获得了有关复合粒子场论的微扰展开式<sup>[1]</sup>。近来, 又求出了等质量情形下, 自旋是 1/2 的正反粒子构成的原子体系的相对论协变的波函数<sup>[2]</sup>。在这些工作基础上, 将不难算出光生相对论仲原子



的过程。不久以前, 对这一过程的计算还被认为是待解决的困难问题<sup>[3]</sup>。

和式(1)相应的费曼图有两个(图 1),

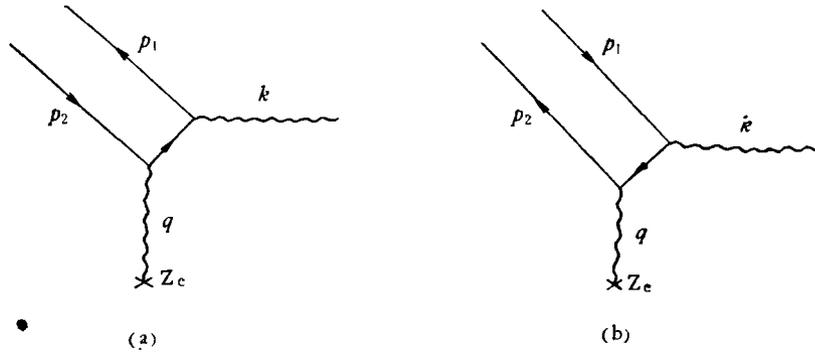


图 1

由图 1 (a)和(b)可看出, 这一过程的计算实质上 and 光生  $\pi^0$  介子一样, 只不过这里将能求出随着四动量传递  $q^2$  而变化的形状因子。由工作[1]所给出的费曼规则, 再适当排列一下, 对下列顶点的跃迁矩阵元将可写为:

$$\langle (e^+e^-) | \bar{\psi} \hat{e}_q \psi | \gamma \rangle$$

$$= ie^2 \delta^4(P - k - q) \int d^4 p S_p \left\{ \bar{\chi}_p(p) \not{\epsilon}_p \left[ \frac{i}{2} (\not{k} - \not{q}) - i\not{\beta} - m \right] \right. \\ \left. + \frac{i}{2} (\not{k} - \not{q}) + i\not{\beta} + m \right] \not{\epsilon}_k \left. \frac{1}{\sqrt{4P_0\omega}} \right\} \quad (2)$$

其中

$$\bar{\chi}_p(p) = f(p) r_s \left[ 1 - \frac{i\not{\beta}}{2m} + \frac{1}{4m^2} (\not{P}\not{\beta} - p\not{P}) \right], \quad (3)$$

$$f(p) = \frac{N}{\left( p^2 + \frac{P^2}{4} + m^2 \right) \left[ \left( p^2 + \frac{P^2}{4} + m^2 \right)^2 - (pP)^2 \right]}, \quad (4)$$

$$N = 16\sqrt{2\pi} m^4 \left( 1 + \frac{P^2}{4m^2} \right)^{5/4}, \quad (5)$$

$$p = \frac{1}{2}(p_1 - p_2), \quad P = p_1 + p_2. \quad (6)$$

在  $(e^+e^-)$ ,  $(\mu^+\mu^-)$  原子情形下, 恒有  $p^2/m^2$ ,  $p \cdot q/m^2$ ,  $p \cdot k/m^2$  较小因而可将(2)式中传播子中分母上的  $p$  取为零. 这时,

$$\langle (e^+e^-) | \bar{\psi} \not{\epsilon}_q \psi | \gamma \rangle \\ = ie^2 \delta^4(P - q - k) \frac{1}{4m\sqrt{P_0\omega}} \int d^4 p \frac{f(p)}{\frac{1}{4}(k - q)^2 + m^2} S_{p\gamma} \not{\beta} \not{\epsilon}_q (\not{k} - \not{q}) \not{\epsilon}_k. \quad (7)$$

对于  $(e^+e^-)$ ,  $(\mu^+\mu^-)$  原子体系可定义一个零点波函数

$$\phi(0) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p f(p) \\ = \frac{m^2}{\sqrt{2\pi}} \left( 1 + \frac{P^2}{4m^2} \right)^{3/4} \left[ 1 - \frac{2}{\pi} \left( 1 + \frac{P^2}{4m^2} \right)^{1/2} \left( 1 - \ln \left( 1 + \frac{P^2}{4m^2} \right)^{1/2} \right) \right]. \quad (8)$$

由于  $\left( 1 + \frac{P^2}{4m^2} \right) \simeq \frac{1}{4} \alpha^2$ , 因而就有

$$\phi(0) \simeq \frac{m^2 \alpha^{3/2}}{4\sqrt{\pi}} \left[ 1 - \frac{\alpha}{\pi} \left( 1 - \ln \frac{\alpha}{2} \right) \right]. \quad (9)$$

将(8), (9)代入(7)式, 就有

$$\langle (e^+e^-) | \bar{\psi} \not{\epsilon}_q \psi | \gamma \rangle \\ = ie^2 (2\pi)^4 \delta^4(P - k - q) \frac{\phi(0)}{\sqrt{P_0\omega} m^2 \left( 1 + \frac{q^2}{4m^2} \right)} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} q_\mu \not{\epsilon}_q k_\nu \not{\epsilon}_k. \quad (10)$$

这就是通常仲氩原子  $0^- \rightarrow 2\gamma$  的湮灭顶点, 唯一的区别是这里多出了  $\left( 1 + \frac{q^2}{4m^2} \right)^{-1}$  的形状因子.

在  $q^2 = 0$ , 即在光子质壳上时, 易算出

$$\begin{aligned}\Gamma_{(e^+e^-) \rightarrow 2\gamma} &= \frac{e^4}{64\pi} \left( \frac{2\phi(0)}{m^3} \right)^2 8m^3 \\ &= \frac{\alpha^5}{2} m \left[ 1 - \frac{2\alpha}{\pi} \left( 1 - \ln \frac{\alpha}{2} \right) \right].\end{aligned}\quad (11)$$

这和通常的算式相合,但是多出了一个由于  $\phi(0)$  值有微小差别的修正项。这是由于这里采取的是相对论协变的波函数(3),在通常运算中用的却是薛定格波函数或瞬时相互作用近似下的波函数。这一修正项在计算  $(e^+e^-) \rightarrow 2\gamma$  跃迁的辐射修正效应时将是不可忽略的<sup>1)</sup>!

对于光生  $0^-$  介子问题,曾经有许多人算过<sup>[4,5]</sup>。这里的计算不过是多了一个形状因子  $\left(1 + \frac{q^2}{4m^2}\right)^{-1}$ 。因而对过程(1)的截面将是(当原子核的自旋是零时):

$$\sigma(\theta, \varphi) = \frac{\alpha^6 \omega |\mathbf{p}|^3}{2m^2 q^4} \frac{\sin^2 \theta}{\left(1 + \frac{q^2}{4m^2}\right)^2} \cdot \frac{(ZF(q^2) - \phi(q^2))^2}{\frac{M + \omega}{M} - \frac{\omega P_0 \cos \theta}{M |\mathbf{P}|}}, \quad (12)$$

其中  $M$  是原子核质量,  $\omega$  是光子能量,  $|\mathbf{P}|$  是  $(e^+e^-)$  原子的动量。  $F(q^2)$  是原子核的形状因子,对于铅原子核,有

$$F(q^2) = e^{\frac{1}{2}\langle r^2 \rangle q^2}, \quad (13)$$

其中  $\langle r^2 \rangle$  是原子核的电磁平均半径的平方,可由  $\mu^-$  介子原子的实验测定出来。  $\phi(q^2)$  是托玛斯-费米的原子形状因子,在 Tietz 近似下<sup>[6,7]</sup>,

$$\begin{aligned}\phi(q^2) &\equiv \phi(\mathbf{q}^2) = \int d\mathbf{r} n(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3\pi^2} Z e^{3/2} \int d\mathbf{r} \frac{e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}}{r^{3/2} \left(1 + \frac{\alpha}{a} r\right)^3} \\ &= \frac{8\sqrt{2}}{3\pi} \frac{1}{|\mathbf{q}|} \int dr \frac{\sin |\mathbf{q}| r}{r^{1/2} \left(1 + \frac{\alpha}{a} r\right)^3},\end{aligned}\quad (14)$$

其中  $\alpha = 0.53625$ ,  $a = 0.88534 Z^{-1/3} r_0$ , 而  $r_0 = \frac{\hbar}{m e^2}$ , 即是玻尔轨道半径。

在四动量传递  $q^2$  较大但又有  $\langle r^2 \rangle q^2 \ll 1$  的情况下,可略去  $F(q^2)$  和  $\phi(q^2)$  的贡献。但  $(e^+e^-)$  原子的形状因子  $\left(1 + \frac{q^2}{4m^2}\right)^{-1}$  却不能忽略。正是这一形状因子的存在使光生  $(e^+e^-)$  原子的截面由  $q^{-4}$  下降改为  $q^{-8}$  方下降! 光生原子的微分截面的特点是在小角度区域存在一个峰值。如果略去原子形状因子的贡献,注意到

$$q^2 = 2\omega(P_0 - |\mathbf{p}| \cos \theta), \quad (15)$$

那末这一微分截面的峰值将在

1) 我们在这里并没有把  $0(\alpha)$  的因子考虑完全,例如在前面略掉分母中的  $p^2$ ,  $(\mathbf{p} \cdot \mathbf{k})$  和  $(\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})$  项贡献也是  $0(\alpha)$  量级,除此文外还有一些  $0(\alpha)$  的因子需要考虑,我们在这里不一一列举,仅指出采用波函数(3)时引起的  $0(\alpha)$  的修正效应。

$$\frac{\partial}{\partial \cos \theta} \left( \frac{1 - \cos^2 \theta}{4\omega^2(P_0 - |\mathbf{P}| \cos \theta)^2} \right) = 0, \quad (16)$$

亦即有

$$\cos \theta = \frac{|\mathbf{P}|}{P_0}, \quad \sin \theta = \frac{m}{P_0}, \quad (17)$$

并有

$$q^2 = \frac{2\omega m^2}{P_0}, \quad \frac{\sin^2 \theta}{q^4} = \frac{1}{16m^2\omega^2}. \quad (18)$$

如果将  $q^2$  的数值代入原子形状因子内, 可看出这一形状因子将使峰值压低了约 4/9 倍! 实际上, 由于原子形状因子的存在将使微分截面中的高峰所处的角度有所偏转。

由式(12)及式(17)、(18), 可看出  $\sigma(\theta, \varphi)$  的峰值竟和  $m^4$  成反比! 这意味着产生  $(e^+e^-)$  原子的截面和  $(\mu^+\mu^-)$  原子的截面将有较大差别! 如果对式(12)略去所有形状因子的贡献, 略去核反冲, 对立体角积分, 可求出高能近似下

$$\sigma = \frac{\pi\omega^6}{m^2} \ln \left( \frac{P_0 + |\mathbf{P}|}{m} \right). \quad (19)$$

由(19)式可看出光生  $(e^+e^-)$  原子的截面约是  $7.12 \times 10^{-34} \cdot \ln \left( \frac{2P_0}{m} \right)$ 。对于  $(\mu^+\mu^-)$  原子就将小  $10^3$  倍!

从上述计算可看出, 在  $(e^+e^-)$ ,  $(\mu^+\mu^-)$  原子产生过程中, 原子形状因子将显著地影响到总截面和微分截面。如果这里探讨的是光生  $\pi^0$  过程的话, 那末这一形状因子将被层子(或夸克)质量所代替(当然, 如果是仅限于最低次费曼图的贡献为主的话)。如果层子(或夸克)有效质量是很轻而不是很重的话, 那末这一类形状因子的贡献在  $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$  寿命的测定上将是不可忽略。反过来, 测量在不同动量传递下的光生  $\pi^0$  介子的截面, 也许能获得关于层子(或夸克)有效质量的一些知识。

### 参 考 文 献

- [1] 何祚麻、张肇西、黄涛, 物理学报, 25 (1976), 215.
- [2] 何炬、何祚麻、张肇西, 自旋  $\frac{1}{2}$  的正反费米子电磁束缚态的近似的 B-S 基态波函数(待发表).
- [3] A. Zichichi, "Lepton and Hadron Structure", Vol. 12, 734, New York, Academic, 1975.
- [4] H. Primakoff, *Phys. Rev.*, 81(1950), 899.
- [5] 程希有、邓质方, 物理学报, 26(1977), 9.
- [6] T. J. Tietz, *J. Chem. Phys.*, 25 (1956), 787; *Z. Naturforsch.*, 23A(1968), 191.
- [7] S. Flügge, "Practical Quantum Mechanics", Vol. II, 128—130, Springer-Verlag, New York, Berlin, 1974.

## THE PHOTOPRODUCTION OF RELATIVISTIC PARA-POSITRONIUM AND MUONIUM

HE JU    CHANG CHAO-SHIE

*(Institute of High Energy Physics, Academia Sinica)*

HE TSO-HSIU

*(Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica)*

### ABSTRACT

In this paper, the photoproduction of the relativistic para-positronium and muonium, similar to the Primakoff effect, is calculated using the perturbation expansion of the quantized composite field theory and relativistic B-S wave functions. A new term multiplied to the form factor is obtained, which makes the amplitudes different from what one obtains from the point-model calculation usually used in this kind of processes. It suggests that the same effect mentioned above may occur in the ordinary primakoff effect too.