第2卷 第5期 高能物理与核物理 Vol. 2, No. 5
1978年9月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS September, 1978

$SU(4)$ 磁单极子与双子解*

汪克林 (中国科学技术大学)　先鼎昌 (中国科学院高能物理研究所)　郑希特 (成都工学院)

摘　　要

以 $SU(4)$ 规范群为例，提出一个简单求解磁单极子及双子的经典解的方法，它可系统地推广于一般的 $SU(N)$ 群的情况．所得到的 $SU(4)$ 单磁荷为 $\pm\frac{1}{g}$， $\pm\frac{\sqrt{3}}{2g}$， $\pm\frac{1}{\sqrt{2}g}$．

一

一般用来求 $SU(2)$，$SU(3)$ 磁单极子的经典解的方法在用于 $SU(4)$ 的情况时显得相当繁复[1]．本文混合使用 $SU(4)$ 标准李代数形式与 Amati[2] 等人的 λ_a ($a = 1, \cdots, 15$) 形式，给出一个较简单的求解方法，它可系统地推广于更高的 $SU(N)$ 群的情况中．

取 $SU(4)$ 规范对称的拉氏函数为

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}(\mathbf{F}_{\mu\nu}\cdot\mathbf{F}_{\mu\nu}) - \frac{1}{2}(D_\mu\boldsymbol{\Phi}\cdot D_\mu\boldsymbol{\Phi}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Phi}\cdot\boldsymbol{\Phi}) - \frac{\lambda}{8}(\boldsymbol{\Phi}\cdot\boldsymbol{\Phi})^2 - \frac{\mu^4}{2\lambda}, \tag{1}$$

其中

$$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) \equiv \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\mathbf{AB}), \tag{2}$$

$$\mathbf{F}_{\mu\nu} = F^a_{\mu\nu}\lambda_a, \quad \boldsymbol{\Phi} = \phi^a\lambda_a, \quad \mathbf{W}_\mu = W^a_\mu\lambda_a \tag{3}$$

$$\begin{cases}\mathbf{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu\mathbf{W}_\nu - \partial_\nu\mathbf{W}_\mu + i[\mathbf{W}_\mu, \mathbf{W}_\nu], \\ D_\mu\boldsymbol{\Phi} = \partial_\mu\boldsymbol{\Phi} + i[\mathbf{W}_\mu, \boldsymbol{\Phi}]\end{cases} \tag{4}$$

这里为简单起见令规范场的自耦合常数 g 为 1，g 的地位不难由改变规范场与规范势的标度而得到恢复．现在让我们来寻求满足由拉氏函数(1)所导出的运动方程及条件

$$D_\mu\boldsymbol{\Phi} = 0 \tag{5}$$

的经典静态球对称解．

在以下采用李代数的标准形式．对 $SU(4)$ 三秩群有

本文 1978 年 1 月 7 日收到．

* 本文主要结果曾在 1977 年 3 月北京高能物理座谈会上报告过．

$$\begin{cases} [\mathbf{H}_i, \mathbf{H}_j] = 0, \ i, \ j = 1, 2, 3, \\ [\mathbf{E}_\alpha, \ \mathbf{E}_{-\alpha}] = \sum_i r_i(\alpha)\mathbf{H}_i, \\ [\mathbf{H}_i, \mathbf{E}_\alpha] = r_i(\alpha)\mathbf{E}_\alpha, \quad \alpha = \pm 1, \cdots, \pm 6 \\ [\mathbf{E}_\alpha, \mathbf{E}_\beta] = N_{\alpha\beta}\mathbf{E}_{\alpha+\beta} \end{cases} \tag{6}$$

其中 $r_i(\alpha)$ 为根,满足

$$r_i(\alpha) = -r_i(-\alpha), \qquad \sum_\alpha r_i(\alpha) r_j(\alpha) = \delta_{ij}. \tag{7}$$

这里定义的 $\mathbf{H}_i$ 与 $\mathbf{E}_\alpha$ 与资料[2]中的 λ_a 矩阵有如下的关系:

$$\begin{cases} \mathbf{H}_1 = \frac{1}{4}\lambda_3, \ \mathbf{H}_2 = \frac{1}{4}\lambda_8, \ \mathbf{H}_3 = \frac{1}{4}\lambda_{15}, \\ \mathbf{E}_{\pm1} = \frac{1}{4\sqrt{2}}(\lambda_1 \pm i\lambda_2), \ \mathbf{E}_{\pm2} = \frac{1}{4\sqrt{2}}(\lambda_4 \mp i\lambda_5), \ \mathbf{E}_{\pm3} = \frac{1}{4\sqrt{2}}(\lambda_6 \pm i\lambda_7), \\ \mathbf{E}_{\pm4} = \frac{1}{4\sqrt{2}}(\lambda_9 \pm i\lambda_{10}), \ \mathbf{E}_{\pm5} = \frac{1}{4\sqrt{2}}(\lambda_{11} \mp i\lambda_{12}), \ \mathbf{E}_{\pm6} = \frac{1}{4\sqrt{2}}(\lambda_{13} \mp i\lambda_{14,}). \end{cases} \tag{8}$$

通过直接运算易得 $r_i(\alpha)$ 及$N_{\alpha\beta}$. $\mathbf{H}_i$构成一个三维的卡当子空间的基矢.

二

选 $SU(4)$ 中的 $(\lambda_7, -\lambda_5, \lambda_2)$ 方向与普通空间 (x, y, z) 作同步球旋转. 选择一个旋转变换 U:

$$U = e^{i\frac{\pi}{4}\lambda_1} e^{i\frac{\pi}{4}\lambda_{14}} e^{i\sqrt{\frac{3}{2}}\beta\lambda_{15}} e^{-i\theta\lambda_5} e^{i\varphi\lambda_2}, \tag{9}$$

经过旋转, $SU(4)$ 的全部生成元在新的规范中以"～"表示:

$$\tilde{\mathbf{H}}_i = U^{-1}\mathbf{H}_i U, \quad \tilde{\mathbf{E}}_{\pm\alpha} = U^{-1}\mathbf{E}_{\pm\alpha}U, \tag{10}$$

它们之间仍保持着标准代数关系式(6). 变换(9)在 $SU(2)$ 的情况下相当于一个 $SU(2)$ 的旋转,把 λ_3 从 z 轴的方向转到一个任意的径向方向[3], 在新的规范中 $\tilde{\lambda}_3$ 通过原来的 λ_1、λ_2、λ_3 和 θ、φ 表示出来. 这是从有奇异弦的阿贝尔规范到无奇异弦的规范的一个变换.

应用如下的数学公式:

$$e^{is}Qe^{-is} = Q + i[S, Q] + \frac{i^2}{2!}[S,[S,Q]] + \cdots \tag{11}$$

如果有

$$[S,Q] = \pm iP, \quad [S,P] = \mp iQ, \tag{12}$$

则有

$$e^{is\alpha}Qe^{-is\alpha} = Q\cos\alpha \mp P\sin\alpha, \tag{13}$$

其中 S, Q, P 为算符; α 为数,我们不难得到明显的 $\tilde{\mathbf{H}}_i$ 的形式为:

$$\tilde{\mathbf{H}}_1 = -\frac{1}{4}[\lambda_2\cos\theta + (\lambda_7\cos\varphi - \lambda_5\sin\varphi)\sin\theta],$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{H}}_2 = \frac{1}{4\sqrt{3}}\Big\{&\frac{1}{2}(\lambda_3\cos 2\varphi + \lambda_1\sin 2\varphi + \sqrt{3}\lambda_8)\cos 2\theta \\
&- (\lambda_4\cos\varphi + \lambda_6\sin\varphi)\sin 2\theta \\
&- \frac{1}{2}\left(\lambda_3\cos 2\varphi + \lambda_1\sin 2\varphi - \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_8\right) + \sqrt{\frac{2}{3}}\lambda_{15} \\
&- [\lambda_{13}\cos\theta + (\lambda_9\cos\varphi + \lambda_{11}\sin\varphi)\sin\theta]\cos 2\beta \\
&- [\lambda_{14}\cos\theta + (\lambda_{10}\cos\varphi + \lambda_{12}\sin\varphi)\sin\theta]\sin 2\beta\Big\}, \qquad (14)\\
\tilde{\mathbf{H}}_3 = \frac{1}{4\sqrt{6}}\Big\{&\frac{1}{2}(\lambda_3\cos 2\varphi + \lambda_1\sin 2\varphi + \sqrt{3}\lambda_8)\cos 2\theta \\
&- (\lambda_4\cos\varphi + \lambda_6\sin\varphi)\sin 2\theta \\
&- \frac{1}{2}\left(\lambda_3\cos 2\varphi + \lambda_1\sin 2\varphi - \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_8\right) + \sqrt{\frac{2}{3}}\lambda_{15} \\
&+ 2[\lambda_{13}\cos\theta + (\lambda_9\cos\varphi + \lambda_{11}\sin\varphi)\sin\theta]\cos 2\beta \\
&+ 2[\lambda_{14}\cos\theta + (\lambda_{10}\cos\varphi + \lambda_{12}\sin\varphi)]\sin 2\beta\Big\}.
\end{aligned}
$$

在 $\tilde{\mathbf{H}}_i$ 的表示式中的确包含了全部 λ_a，因而可以说是把 λ_3、λ_8、λ_{15} 转到 $SU(4)$ 的最普遍方向．在 U 中除了与 (x, y, z) 作同步旋转的 θ, φ 角外，还有绕 λ_{15} 的转角 β 和绕 λ_{14} 的转角 $\gamma\left(\text{不影响普遍结果，这里取为 } \frac{\pi}{4}\right)$ 的任意参数，但它们不影响问题的最终结果．U 的形式与选择哪一个 $SU(2)$ 子空间与普通空间同步有关．如果选 $(\lambda_6, \lambda_5, \lambda_1)$，则

$$
U = e^{i\frac{\pi}{4}\lambda_2}e^{i\frac{\pi}{4}\lambda_{14}}e^{i\sqrt{\frac{2}{3}}\beta\lambda_{15}}e^{i\theta\lambda_5}e^{i\varphi\lambda_1}.
$$

$\tilde{\mathbf{E}}_{\pm\alpha}$ 的表式可类似地得出，这里我们不明显地写出．

由于解的球对称性质，我们采用球座标．显然，由于 U 与 r 无关，故有

$$
\partial_r\tilde{\mathbf{H}}_i = 0, \quad \partial_r\tilde{\mathbf{E}}_\alpha = 0. \qquad (15)
$$

用式(9)及(10)，容易证明如下一个有用的关系式：

$$
\begin{aligned}
&\partial_j\tilde{\mathbf{X}} = U^{-1}[U\partial_j U^{-1}, \mathbf{X}]U, \\
&j = \theta, \varphi
\end{aligned} \qquad (16)
$$

$\mathbf{X}$ 表算符 $\mathbf{H}_i$ 或 $\mathbf{E}_\alpha$ 等．式(16)帮助我们避开对复杂的 $\tilde{\mathbf{X}}$ 进行运算，而是在算出 $U\partial_j U^{-1}$ 后，在原始的规范中对 $\mathbf{H}_i$ 及 $\mathbf{E}_\alpha$ 作对易子运算，由于采用了李代数的标准形式，在这种运算里显得极为简单，例如

$$
\begin{aligned}
U\partial_\theta U^{-1} &= -\sqrt{2}\{(\mathbf{E}_{+2} - \mathbf{E}_{-2}) - i(\mathbf{E}_{+3} + \mathbf{E}_{-3}) + (\mathbf{E}_{+4} - \mathbf{E}_{-4}) + i(\mathbf{E}_{+5} + \mathbf{E}_{-5})\}, \\
U\partial_\varphi U^{-1} &= i4\mathbf{H}_1\cos\theta + \sqrt{2}\sin\theta\{i(\mathbf{E}_{+2} + \mathbf{E}_{-2}) + (\mathbf{E}_{+3} - \mathbf{E}_{-3}) \\
&\quad - i(\mathbf{E}_{+4} + \mathbf{E}_{-4}) + (\mathbf{E}_{+5} - \mathbf{E}_{-5})\},
\end{aligned} \qquad (17)
$$

由式(16)，有

$$
\begin{aligned}
\partial_\theta\tilde{\mathbf{H}}_i &= \sqrt{2}\{r_i(2)(\tilde{\mathbf{E}}_{+2} + \tilde{\mathbf{E}}_{-2}) - ir_i(3)(\tilde{\mathbf{E}}_{+3} - \tilde{\mathbf{E}}_{-3}) + r_i(4)(\tilde{\mathbf{E}}_{+4} + \tilde{\mathbf{E}}_{-4}) \\
&\quad + ir_i(5)(\tilde{\mathbf{E}}_{+5} - \tilde{\mathbf{E}}_{-5})\}, \\
\partial_\varphi\tilde{\mathbf{H}}_i &= -\sqrt{2}\sin\theta\{ir_i(2)(\tilde{\mathbf{E}}_{+2} - \tilde{\mathbf{E}}_{-2}) + r_i(3)(\tilde{\mathbf{E}}_{+3} + \tilde{\mathbf{E}}_{-3}) \\
&\quad - ir_i(4)(\tilde{\mathbf{E}}_{+4} - \tilde{\mathbf{E}}_{-4}) + r_i(5)(\tilde{\mathbf{E}}_{+5} - \tilde{\mathbf{E}}_{-5})\}.
\end{aligned} \qquad (18)
$$

注意到协变导数的定义，易证如取

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\mathbf{W}}_\tau = \sum_i c_i \tilde{\mathbf{H}}_i, \\
&\tilde{\mathbf{W}}_r = 0, \\
&\tilde{\mathbf{W}}_\theta = iU^{-1}(U\partial_\theta U^{-1})U, \\
&\tilde{\mathbf{W}}_\varphi = 4\cos\theta\tilde{\mathbf{H}}_1 + iU^{-1}(U\partial_\varphi U^{-1})U,
\end{aligned}
\tag{19}
$$

则由式(15)、(16)，$\tilde{\mathbf{H}}_i$ 有平移不变性

$$
D_\mu \tilde{\mathbf{H}}_i = 0, \tag{20}
$$

且由式(4)、(19)给出的规范场强 $\tilde{\mathbf{F}}_{\mu\nu}$ 满足由拉氏函数(1)所导出的运动方程，且有

$$
[\tilde{\mathbf{F}}_{\mu\nu}, \tilde{\mathbf{H}}_i] = 0, \tag{21}
$$

即此时规范场强只有卡当分量[4]:

$$
\mathbf{F}_{\mu\nu} = 16\sum_i (\mathbf{F}_{\mu\nu}\cdot\tilde{\mathbf{H}}_i)\tilde{\mathbf{H}}_i. \tag{22}
$$

由于 $(\mathbf{F}_{\mu\nu}\cdot\mathbf{H}_i)$ 是规范无关的，所以式(22)在其它经 U 变换而得的规范中亦成立. 后面将说明，在条件(5)之下，物理电磁场张量 $F_{\mu\nu}$ 可简单定义为 $\mathbf{F}_{\mu\nu}$ 在卡当子空间中的矢长.

三

但是由式(19)给出的解只对应于一种单磁荷值. 为了得到更普遍的磁单极子或双子解，我们把形式(19)略为扩充，提出如下的求解形式:

$$
\begin{cases}
\tilde{\mathbf{W}}_\tau = \sum_i c_i(r)\tilde{\mathbf{H}}_i, \\
\tilde{\mathbf{W}}_r = 0, \\
\tilde{\mathbf{W}}_\theta = \sum_\alpha b_\alpha \tilde{\mathbf{E}}_\alpha, \\
\tilde{\mathbf{W}}_\varphi = \sin\theta \sum_\alpha d_\alpha \tilde{\mathbf{E}}_\alpha,
\end{cases}
\tag{23}
$$

系数 b_α 及 d_α 可能依赖于 r，但不依赖于 θ 及 φ. 由于所求的解为双子或磁单极子解，其电磁场张量应只有 $F_{\tau r}$ 及 $F_{\theta\varphi}$ 分量，于是相应的规范场的非零分量只能是 $\tilde{\mathbf{F}}_{\tau r}$ 及 $\tilde{\mathbf{F}}_{\theta\varphi}$，因而我们在求解时附加以条件

$$
\tilde{\mathbf{F}}_{\tau\theta} = \tilde{\mathbf{F}}_{\tau\varphi} = \tilde{\mathbf{F}}_{r\theta} = \tilde{\mathbf{F}}_{r\varphi} = 0. \tag{24}
$$

由 $\tilde{\mathbf{F}}_{\tau\theta} = 0$，应用式(8)、(18)，有

$$
b_{\pm1} = b_{\pm6} = 0,\ b_2 = -b_{-2},\ b_3 = b_{-3},\ b_4 = -b_{-4},\ b_5 = b_{-5}, \tag{25}
$$

$$
\begin{cases}
(-\sqrt{2} + ib_2)\sum_i c_i(r) r_i(2) = 0, \\
(\sqrt{2} + b_3)\sum_i c_i(r) r_i(3) = 0, \\
(-\sqrt{2} + ib_4)\sum_i c_i(r) r_i(4) = 0, \\
(-\sqrt{2} + b_5)\sum_i c_i(r) r_i(5) = 0,
\end{cases}
\tag{26}
$$

而由 $\tilde{\mathbf{F}}_{\tau\varphi}=0$，有

$$d_{\pm 1}=d_{\pm 6}=0,\ d_2=d_{-2},\ d_3=-d_{-3},\ d_4=d_{-4},\ d_5=-d_{-5},\tag{27}$$

$$\begin{cases}(\sqrt{2}+d_2)\sum\limits_i c_i(r)r_i(2)=0,\\(\sqrt{2}+id_3)\sum\limits_i c_i(r)r_i(3)=0,\\(-\sqrt{2}+d_4)\sum\limits_i c_i(r)r_i(4)=0,\\(\sqrt{2}+id_5)\sum\limits_i c_i(r)r_i(5)=0.\end{cases}\tag{28}$$

由条件 $\tilde{\mathbf{F}}_{r\theta}=0$, $\tilde{\mathbf{F}}_{r\varphi}=0$，注意到式(15)，有

$$\partial_r b_\alpha=0,\quad \partial_r d_\alpha=0,\tag{29}$$

即 b_α 及 d_α 为不依赖于 r 的常数．按条件 (21)，$\tilde{\mathbf{F}}_{\tau r}$ 及 $\tilde{\mathbf{F}}_{\theta\varphi}$ 应只有卡当分量，对前者求解形式(23)已经保证了，对后者，这一要求导致

$$b_2=id_2,\ b_3=id_3,\ b_4=-id_4,\ b_5=-id_5,\tag{30}$$

$$d_2-d_4-\frac{1}{\sqrt{2}}d_2d_4-b_3+b_5+\frac{1}{\sqrt{2}}b_3b_5=0,\tag{31}$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_{\theta\varphi}=\sin\theta\sum_i K_i\tilde{\mathbf{H}}_i,\tag{32}$$

其中

$$\begin{cases}K_1=\sqrt{2}\,(d_2+b_3-d_4-b_5)+\dfrac{1}{2}(d_2^2+b_3^2+d_4^2+b_5^2),\\K_2=\sqrt{6}\,(d_2-b_3)-\sqrt{\dfrac{2}{3}}(d_4-b_5)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}(d_2^2-b_3^2)+\dfrac{1}{2\sqrt{3}}(d_4^2-b_5^2),\\K_3=-\dfrac{4}{\sqrt{3}}(d_4-b_5)+\sqrt{\dfrac{2}{3}}(d_4^2-b_5^2),\end{cases}\tag{33}$$

以及

$$\tilde{\mathbf{F}}_{\tau r}=-\sum_i c_i'(r)\tilde{\mathbf{H}}_i.\tag{34}$$

在球座标中，计及(5)后，运动方程为

$$\partial_r(r^2\tilde{\mathbf{F}}_{\tau r})=0,\tag{35}$$

$$[\tilde{\mathbf{F}}_{\tau r},\tilde{\mathbf{W}}_\tau]=0,\tag{36}$$

$$\partial_\theta\left(\frac{1}{\sin\theta}\tilde{\mathbf{F}}_{\theta\varphi}\right)+\frac{i}{\sin\theta}[\tilde{\mathbf{W}}_\theta,\tilde{\mathbf{F}}_{\theta\varphi}]=0,\tag{37}$$

$$\partial_\varphi\tilde{\mathbf{F}}_{\theta\varphi}+i[\tilde{\mathbf{W}}_\varphi,\tilde{\mathbf{F}}_{\theta\varphi}]=0,\tag{38}$$

方程(36)显然被满足．以(34)代入(35)，考虑到(15)，有

$$c_i'(r)=-\frac{\alpha_i}{r^2},\quad \alpha_i\ \text{为常数},\tag{39}$$

由此

$$c_i(r)=\frac{\alpha_i}{r}+\delta_i,\tag{40}$$

常数项 δ_i 对 $\tilde{\mathbf{F}}_{\tau r}$ 的计算并无影响,可令之为零. 方程(37)、(38)导致

$$\begin{cases} (\sqrt{2}+d_2)(K_1+\sqrt{3}K_2)=0, \\ (\sqrt{2}+b_3)(K_1-\sqrt{3}K_2)=0, \\ (\sqrt{2}-d_4)\left(K_1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}K_2+\sqrt{\dfrac{8}{3}}K_3\right)=0, \\ (\sqrt{2}-b_5)\left(K_1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}K_2-\sqrt{\dfrac{8}{3}}K_3\right)=0. \end{cases} \tag{41}$$

利用(30)及(40),可把式(26)及(28)合并为

$$\begin{cases} (\sqrt{2}+d_2)(\alpha_1+\sqrt{3}\alpha_2)=0, \\ (\sqrt{2}+b_3)(\alpha_1-\sqrt{3}\alpha_2)=0, \\ (\sqrt{2}-d_4)\left(\alpha_1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\alpha_2+\sqrt{\dfrac{8}{3}}\alpha_3\right)=0, \\ (\sqrt{2}-b_5)\left(\alpha_1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\alpha_2-\sqrt{\dfrac{8}{3}}\alpha_3\right)=0. \end{cases} \tag{42}$$

待定常数 $d_2, b_3, d_4, b_5, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可由方程(31)、(41)及(42)定出. 在解出它们之前,先给出电磁场张量的明显表达式. 电磁场张量应由 $\tilde{\mathbf{F}}_{\mu\nu}$ 规范不变地定出,现在 $\tilde{\mathbf{F}}_{\mu\nu}$ 为卡当子空间的"矢量",而在规范变换 U 之下和卡当子空间本身旋转之下可以定出的不变量就是这个"矢量"的"矢长". 因此,定义一个沿 $\tilde{\mathbf{F}}_{\theta\varphi}$ 方向的单位矢量 $\tilde{\mathbf{n}}$:

$$\tilde{\mathbf{n}}=\frac{1}{K}\sum_i K_i\tilde{\mathbf{H}}_i^0, \quad K=\pm\sqrt{\sum_i K_i^2}, \tag{43}$$

而

$$\tilde{\mathbf{H}}_i^0=4\tilde{\mathbf{H}}_i \tag{44}$$

是归一了的卡当基矢,$(\tilde{\mathbf{H}}_i^0\cdot\tilde{\mathbf{H}}_i^0)=1$. 于是由(32),在恢复规范耦合常数 g 的位置后,有

$$F_{\theta\varphi}=(\tilde{\mathbf{F}}_{\theta\varphi}\cdot\tilde{\mathbf{n}})=\sin\theta\frac{K}{4g}, \tag{45}$$

类似地,由(34)、(39),有

$$F_{\tau r}=(\tilde{\mathbf{F}}_{\tau r}\cdot\tilde{\mathbf{n}})=\frac{1}{4Kgr^2}\sum_i\alpha_iK_i, \tag{46}$$

由此得到的单磁荷值 g 与电荷值 Q 分别为

$$g=\frac{K}{4g}, \quad Q=\frac{1}{4Kg}\sum_i\alpha_iK_i. \tag{47}$$

由(31)、(41)及(42)可得到若干组不同的解,但除平庸解 $(g=0, Q=0)$ 外,本质上给出不同 K 值的解只有三组:

(A) $$d_2=-\sqrt{2}, \quad b_3=-\sqrt{2}, \quad d_4=\sqrt{2}, \quad b_5=\sqrt{2},$$

$$K_1=-4, \quad K_2=K_3=0, \quad K=4, \quad g_1=\pm\frac{1}{g} \tag{48}$$

这一组解正是解(19),这时 $\tilde{\mathbf{H}}_i$ 具有平移不变性, g_1 同于 $SU(2)$ 的单磁荷[3].

(B)
$$d_2=-\sqrt{2},\quad b_3=-\sqrt{2},\quad d_4=\sqrt{2},\quad b_5=0;$$

$$K_1=-3,\quad K_2=-\sqrt{\frac{1}{3}},\quad K_3=-\sqrt{\frac{8}{3}},\quad K=2\sqrt{3},\quad g_2=\pm\frac{\sqrt{3}}{2g},\tag{49}$$

与这一组解相应的 $\tilde{\mathbf{W}}_\mu$, $\tilde{\mathbf{H}}_i$ 不具平移不变性，g_2 同于 $SU(3)$ 的单磁荷解[5].

(C)
$$d_2=-\sqrt{2},\quad b_3=0,\quad d_4=0,\quad b_5=\sqrt{2};$$

$$K_1=-2,\quad K_2=-\frac{2}{\sqrt{3}},\quad K_3=\sqrt{\frac{8}{3}},\quad K=2\sqrt{2},\quad g_3=\pm\frac{1}{\sqrt{2}g},\tag{50}$$

与这组解相应的单磁荷值 $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}g}$ 是 $SU(4)$ 所独有，不同于 $SU(2)$ 及 $SU(3)$ 的情况者.

当 $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$ 时，上述三组解也就是磁单极子解. 对于双子的情况，对解 (A) 来说，由(42)可见 α_i 可取任意值. 对解 (B) 来说，只要求 α_i 满足

$$\alpha_1-\frac{1}{\sqrt{3}}\alpha_2-\sqrt{\frac{8}{3}}\alpha_3=0,\tag{51}$$

而对解 (C) 来说，要求

$$\alpha_1=\sqrt{3}\,\alpha_2,\quad \alpha_1+\sqrt{\frac{1}{3}}\alpha_2+\sqrt{\frac{8}{3}}\alpha_3=0.\tag{52}$$

如果要求在卡当子空间中电、磁场张量 $\tilde{\mathbf{F}}_{tr}$、$\tilde{\mathbf{F}}_{\theta\varphi}$ 是同一 $\tilde{\mathbf{n}}$ 方向(如(46)所定义的那样)，则要选

$$\frac{\alpha_1}{K_1}=\frac{\alpha_2}{K_2}=\frac{\alpha_3}{K_3}=\alpha,\tag{53}$$

对各组解方程(42)均可满足，但 α 仍可为任意值，所以电荷是没有受到任何量子化条件限制的.

如果我们选 Higgs 场是沿 $\tilde{\mathbf{n}}$ 方向(43):

$$\tilde{\boldsymbol{\Phi}}=\phi\tilde{\mathbf{n}}=\frac{\phi}{K}\sum_i K_i\tilde{\mathbf{H}}_i^0,\tag{54}$$

且

$$\phi=\pm\sqrt{\frac{2\mu^2}{\lambda}},\tag{55}$$

那么这 Higgs 场 $\boldsymbol{\Phi}$ 满足条件(5). 由此可见，对电磁场张量的定义 (45)、(46) 实际上与 [3]的定义推广到 $SU(N)$ 情况(在条件 $D_\mu\boldsymbol{\Phi}=0$ 下)相一致.

在这里所用的方法中，可以方便地得到倍步解[4]. 对倍步情形，如将式 (9) 中的 $\theta\to m\theta$, 则式(17)中 $U\partial_\theta U^{-1}\to mU\partial_\theta U^{-1}$, 因而由(16), $\partial_\theta\to m\partial_\theta$, 从(4)、(37)，应有 $\tilde{\mathbf{W}}_\theta\to m\tilde{\mathbf{W}}_\theta$, $\tilde{\mathbf{F}}_{\theta\varphi}\to m\tilde{\mathbf{F}}_{\theta\varphi}$, 从而 $g_i\to mg_i$, 即为倍步荷值.

参 考 资 料

[1] 1977 年 3 月本工作报告后，看到 A. Chakrabarti and J. Dipoko, *Phys. Rev.*, **D15** (1977), 3011, 文章讨论了 $SU(4)$的经典解,繁而未得到本文的 $\pm\frac{1}{\sqrt{2}g}$ 的荷值. M. Kaku, *Phys. Rev.*, **D 13**(1976), 2881, 则是讨论完全另外类型的解.
[2] D. Amati, H. Bacry, J. Nuyts, J. Prentki, *Nuovo. Cim.*, **34**(1964), 1732.
[3] G. 't Hooft, *Nucl. Phys.*, **B79**(1974), 276; J. Arafume et. al., *J. Math. Phys.*, **16**(1975), 433.
[4] 侯伯宇, $SU(N)$规范场的可对易分量及带荷粒子分量,（西北大学科研报告）.
[5] W. J. Marciano and H. Pagels, *Phys. Rev.*, **D12**(1975), 1093.

ON THE $SU(4)$ MONOPOLE AND DYON SOLUTIONS

WANG KE-LIN
(*University of Science and Technology of China*)
HSIEN TING-CHANG
(*Institute of High Energy Physics, Acadeia Sinica*)
CHENG HSI-TEH
(*Chengtu Institute of Technology*)

ABSTRACT

A simple method is proposed to obtain the classical monopole and dyon solutions in the case of $SU(4)$ symmetry, which can be systematically generalized to the general case of $SU(N)$. The solutions obtained in the $SU(4)$ case correspond to magnetic charges of $\pm\frac{1}{g}$, $\pm\frac{\sqrt{3}}{2g}$, $\pm\frac{1}{\sqrt{2}g}$.