关于B-S波函数在相对时间趋向无穷大时的渐近行为

何祚庥 张肇西 黄涛
（中国科学院高能物理研究所）

在我们建立的复合粒子场论中曾广泛地应用B-S（Bethe-Salpeter）波函数的一个性质，即假定波函数对于相对坐标 x 有

$$\Phi(x, P)|_{x\to\pm\infty} = 0^{[1,2]}, \tag{1}$$

其中 $x = x_1 - x_2$，P 是质心能动量．但这一假定似乎并不一定成立．例如，Wick 曾在标量粒子组成复合粒子的情况下，给出零质量复合粒子的严格解的形式是[3]

$$\Phi(p, P) = \frac{1}{(p^2 + m^2)^3}, \tag{2}$$

其中 p 是相对动量，m 是粒子质量．由此可得

$$\begin{aligned}\Phi(x, P) &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\,\frac{e^{ipx}}{(p^2+m^2-i\epsilon)^3}\\ &= \frac{1}{2(2\pi)^4}\frac{\partial}{\partial(m^2)}\frac{\partial}{\partial(m^2)}\int d^4p\,\frac{e^{ipx}}{p^2+m^2-i\epsilon}\\ &= \frac{1}{2(2\pi)^4}\frac{\partial}{\partial(m^2)}\frac{\partial}{\partial(m^2)}D_F(x)\\ &= -\frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial(m^2)}\frac{\partial}{\partial(m^2)}\left\{\delta(-x^2) + \frac{m^2}{2}\frac{H_1^{(2)}(-im\sqrt{x^2})}{-im\sqrt{x^2}}\right\}.\end{aligned} \tag{3}$$

注意到 $H_\nu^{(2)}(z)$ 函数有下列渐近行为

$$H_\nu^{(2)}(z) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{-i(z-\frac{\nu}{2}\pi-\frac{\pi}{4})}\cdot\left[1 + \frac{3}{8iz} + \cdots\right]. \tag{4}$$

显然，当 $x^2 > 0$，即沿类空方向，并有 $x^2 \to \infty$ 时，$\Phi(x, P)$ 是指数下降的，当 $x^2 < 0$，即沿类时方向，并有 $x^2 \to -\infty$ 时，就有

$$\Phi(x, P)|_{\sqrt{-x^2}\to\pm\infty} \sim \frac{1}{64\pi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\sqrt{-x^2}}{m^3}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-i\left(\sqrt{-x^2}\,m-\frac{3\pi}{4}\right)}. \tag{5}$$

这样，$\Phi(x, P)$ 在类时方向上振荡地趋向无穷大，不能满足假定(1)！因此，在复合粒子场论中一系列推导将成为疑问，在文 [1—2] 中所证明的各公式不一定再能成立．

我们在文 [4] 中曾重新审查了复合粒子场论体系，发现理论的建立并不一定需要有(1)式．对于 B-S 波函数将能乘上一个任意的衰减函数，这就能给出文 [1-2] 中各个公式

本文 1977 年 8 月 12 日收到．

而没有困难．这是由于 S 矩阵在质壳外可以任意延拓的结果．

本文将指出，除了上述解决办法外，(1)式的假定仍是可以成立的．注意到 Wick 解式(2)并不是 B-S 波函数的普遍解答，它对应于零质量的复合粒子．在渐近场论中通常是不能容纳零质量的粒子的．这就需要讨论非零质量 B-S 波函数的渐近行为．然而，普遍地讨论这问题将是很困难的，这是由 B-S 方程求解的困难造成的．这里讨论非零质量复合粒子的情况时，只用非零质量近似解来说明它的渐近行为与零质量解是很不相同的．例如，非零质量基态波函数的近似解是[3,5]

$$\chi(p, P) \sim \frac{1}{\left(p^2+m^2+\frac{P^2}{4}\right)\left(p^2-pP+m^2+\frac{P^2}{4}\right)\left(p^2+pP+m^2+\frac{P^2}{4}\right)}, \tag{6}$$

其中 p 是相对动量，P 是质心动量，m 是电子质量．在 x 空间的波函数将是

$$\begin{aligned}\chi(x, P) \sim & \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p \\ & \times \frac{e^{ipx}}{\left(p^2+m^2+\frac{P^2}{4}\right)\left(p^2-pP+m^2+\frac{P^2}{4}\right)\left(p^2+pP+m^2+\frac{P^2}{4}\right)} \\ & = \frac{1}{(2\pi)^4 i^3}\int_0^\infty d\alpha\int_0^\infty d\beta\int_0^\infty d\gamma\int d^4p \\ \exp\Big\{-i\Big[(\alpha+\beta+\gamma)p^2 & -(x-\beta P+\gamma P)p+(\alpha+\beta+\gamma)\left(m^2+\frac{P^2}{4}\right)\Big]\Big\} \\ & = \frac{1}{16\pi^2}\int_0^\infty d\alpha\int_0^\infty d\beta\int_0^\infty d\gamma\frac{1}{(\alpha+\beta+\gamma)^2} \\ & \exp\left\{i\frac{(x-\beta P+\gamma P)^2}{4(\alpha+\beta+\gamma)}-i(\alpha+\beta+\gamma)\left(m^2+\frac{P^2}{4}\right)\right\}.\end{aligned} \tag{7}$$

令 $\beta=\lambda y,\ \gamma=\lambda z,\ \alpha=(1-y-z)\lambda$，就有

$$\begin{aligned}\chi(x, P) \sim & \frac{1}{16\pi^2}\int_0^1 dy\int_0^{1-y}dz\int_0^\infty d\lambda \\ & \exp\left\{i\left[\frac{x^2}{4\lambda}-\frac{1}{2}(y-z)Px+\frac{\lambda}{4}(y-z)^2P^2-\lambda\left(m^2+\frac{P^2}{4}\right)\right]\right\},\end{aligned} \tag{8}$$

Wick 零质量解相当(8)式中 $P=0$ 的情形，即有

$$\begin{aligned}\Phi(x, P) &= \frac{1}{16\pi^2}\int_0^1 dy\int_0^{1-y}dz\int_0^\infty d\lambda\exp\left\{i\left(\frac{x^2}{4\lambda}-\lambda m^2\right)\right\} \\ &= \frac{1}{32\pi^2}\int_0^\infty d\lambda\exp\left\{i\left(\frac{x^2}{4\lambda}-\lambda m^2\right)\right\}.\end{aligned} \tag{9}$$

利用(3)和(9)式．这时有：

$$\begin{aligned}\chi(x,P) = & 2\int_0^1 dy\int_0^{1-y}dz\, e^{-\frac{i}{2}(y-z)P\cdot x}\left(-\frac{1}{8\pi}\right)\frac{\partial}{\partial(m^{*2})}\frac{\partial}{\partial(m^{*2})} \\ & \times\left\{\delta(-x^2)+\frac{m^{*2}}{2}\frac{H_1^{(2)}(-im^*\sqrt{x^2})}{-im^*\sqrt{x^2}}\right\},\end{aligned} \tag{10}$$

其中 $m^{*2}=m^2+\frac{P^2}{4}-\frac{P^2}{4}(y-z)^2$. 对于类空区 $\chi(x,P)$ 的行为和 $\Phi(x,P)$ 相同，仍有指数下降因子. 而对于类时区我们需要仔细研究：

我们令 $N=\sqrt{-x^2}$，$-(P\cdot x)=\xi N\sqrt{-P^2}$，$a=(m^2+P^2/4)^{1/2}$ 和 $b=\frac{\sqrt{-P^2}}{2}$.

下面我们来研究 N 趋于无穷时 $\chi(x,P)$ 的渐近行为. 利用汉克尔函数渐近展开式 (4) 代入 (10) 式，只保留最高阶项：

$$\chi(x,P)\underset{N\to\infty}{\sim}\frac{\sqrt{N}}{32\pi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^1 dy\int_0^{1-y}dz\, e^{-ibN(y-z)/\xi}\frac{1}{[a^2+b^2(y-z)^2]^{3/4}}\,e^{-i\left[N\sqrt{a^2+b^2(y-z)^2}-\frac{3\pi}{4}\right]}$$

$$\sim\frac{\sqrt{N}}{32\pi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,e^{-i\frac{3\pi}{4}}\left\{\int_0^1 dz(1-z)\frac{e^{-iN(\sqrt{a^2+b^2z^2}+bz/\xi)}}{[a^2+b^2z^2]^{3/4}}\right.$$

$$\left.+\int_0^1 dz(1-z)\frac{e^{-iN(\sqrt{a^2+b^2z^2}-bz/\xi)}}{[a^2+b^2z^2]^{3/4}}\right\}. \tag{11}$$

如果对第一个积分用变数代换 $u=\sqrt{a^2+b^2z^2}+bz/\xi$，对第二个积分用变数代换 $u=\sqrt{a^2+b^2z^2}-bz/\xi$，则有

$$\chi(x,P)\underset{N\to\infty}{\sim}\frac{\sqrt{N}}{64\pi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,e^{-i\frac{3\pi}{4}}\left\{\int_a^{b/\xi+\sqrt{a^2+b^2}}\left(\frac{\xi}{b}\right)\frac{1}{1-\xi^2}\left[1-\left(\frac{\xi}{b}\right)\frac{u-\sqrt{a^2(1-\xi^2)+u^2\xi^2}}{1-\xi^2}\right]\cdot\right.$$

$$\cdot\left[\frac{1-\xi^2}{\sqrt{a^2(1-\xi^2)+u^2\xi^2}}\right]^{3/2}\cdot\left[1-\frac{u\xi^2}{\sqrt{a^2(1-\xi^2)+u^2\xi^2}}\right]e^{-iNu}\,du$$

$$+\int_{-b/\xi+\sqrt{a^2+b^2}}^{a}\left(\frac{\xi}{b}\right)\frac{1}{1-\xi^2}\left[1+\left(\frac{\xi}{b}\right)\frac{u-\sqrt{a^2(1-\xi^2)+u^2\xi^2}}{1-\xi^2}\right]\cdot$$

$$\left.\cdot\left[\frac{1-\xi^2}{\sqrt{a^2(1-\xi^2)+u^2\xi^2}}\right]^{3/2}\cdot\left[1-\frac{u\xi^2}{\sqrt{a^2(1-\xi^2)+u^2\xi^2}}\right]e^{-iNu}\,du\right\}. \tag{12}$$

根据黎曼勒贝格引理*：

若有 $G=\int_{u_1}^{u_2}du\, f(u)e^{-iu\tau}$，

其中 $f(u)$ 是在区间 $[u_1,u_2]$ 内直到 n 次微商可积，$n+1$ 次微商不再可积的任一函数，则有

$$G\underset{\tau\to\infty}{\sim}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(u)}{(i\tau)^{k+1}}e^{-iu\tau}\Big|_{u_1}^{u_2}+O(\tau^{-n}); \tag{13}$$

当我们仅保留不为零的最高阶项时：

$$\chi(x,P)\underset{N\to\infty}{\sim}\frac{1}{4(2\pi N)^{3/2}}e^{-i\frac{3\pi}{4}}\frac{\xi^2}{b^2}\left\{\frac{2}{a^{3/2}}e^{-iNa}-\frac{m^{1/2}}{(m+\xi b)^2}e^{-iN(m+b/\xi)}\right.$$

$$\left.-\frac{m^{1/2}}{(m-\xi b)^2}e^{-iN(m-b/\xi)}\right\}+O(N^{-5/2}). \tag{14}$$

其中在利用 (13) 式得到 (14) 式时，相应 (13) 式中 $k=0$ 的项正好相消为零，因此开始

---

* 这一引理用分部积分的方法即可证明。

有贡献的项是 $k=1$ 的项. 对于这种情况考虑到我们前面已用到渐近展开，一般需要在(11)式中增加由(10)式给出的低一阶的渐近展开项，因为它表面上看也是 $O(N^{-3/2})$ 的.但是我们现在迂到的情况，$k=0$ 项相消是由(10)式的积分区域性质决定的，如在(11)式增加低一阶的渐近展开项亦有 $k=0$ 的项相消的结果,这样它实际上给出的贡献亦要比表面上看出的贡献低一阶即 $O(N^{-5/2})$，因此(14)式已是考虑完全了的,准确到 $O(N^{-3/2})$ 的 $\chi(x,P)$ 的渐近行为.

从最后的结果(14)式，我们看到它与(5)式的行为很不一样:(5)式的行为是发散振荡的,而(14)式的行为是收敛振荡的(但可以通过 $P^2\rightarrow 0$ 取极限的方法从(14)式回到(5)式). 尽管我们所用的(6)式是一个近似的 B-S 波函数，但它在弱束缚时是一个很好的近似波函数. 此外,具有(14)的渐近行为是由于式(6)中存在 (P,p) 的因子,而这一因子在复合粒子质量不等于零时必须存在，因为这一因子是由原 B-S 方程的微分算子移到分母上的结果. 所以渐近行为(14)可能是具有普遍意义的. 顺便指出的是:联系到两个粒子无相互作用完全自由时(是平面波)，它们相对运动波函数是定常振荡的. 即使它们有些相互作用但不形成束缚态,也不处在共振峰处,只是把平面波扭曲，其相对运动波函数也具有定常振荡的性质. 因此,在这里发生了一种十分有兴趣的情况，即无束缚、有束缚和极强束缚(把粒子质量完全束缚掉)三种情况的 B-S 波函数在类时区的渐近行为很不相同,而且有束缚的情况并不是简单介于无束缚和极强束缚两种极限情况之间!

最后我们在此对朱洪元同志的许多有益的讨论表示感谢.

参 考 资 料

[1] 何祚庥、黄涛,物理学报, **23** (1974), 113.
[2] 何祚庥、黄涛,物理学报, **23** (1974), 264.
[3] G. E. Wick, *Phys. Rev.*, **96** (1954), 1124.
[4] 何祚庥、黄涛,科学通报, **20** (1975), 419.
[5] R. E. Cutkosky, *Phys. Rev.*, **96** (1954), 1135.

ON THE ASYMPTOTIC BEHAVIOUR OF THE B-S WAVE FUNCTION AS THE RELATIVE TIME APPROACHES INFINITY

HO TSO-HSIU CHANG CHAO-SHIE HUANG TAO
(Institute of High Energy Physics, Akademia Sinica)