第2卷 第2期 高能物理与核物理 Vol. 2, No. 2
1978年3月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS March 1978

规范场理论的环路位相因子方法

谷超豪
(复旦大学)

摘要

在规范场理论中，环路位相因子更能反映规范场的本质. 本文就以环路位相因子为出发点来叙述规范场理论，从而形成一个新的方法. 用这种方法讨论规范场的等价性、化约性和对称性等等，有很多方便. 特别，在本文中提出了决定具对称性(在时空变换下)的规范场的一般方法，并论述了场强对场的决定作用.

(一) 引言

在规范场理论的积分形式中，曲线弧的积分因子是叙述的出发点[1,2]，从电磁场理论相应的 U_1 群规范场来看，可以观察的，起实质作用的是环路的位相因子[3]. 就一般规范场而言，环路位相因子也更能反映规范场的本质. 因此就有必要以环路位相因子作为出发点来叙述规范场理论. 在本文中我们实现了这个想法，无论对于明可夫斯基时空上的规范场或一般微分流形上的整体规范场，都可以作这样的叙述，而且很有方便.

我们先利用以一定点为始点和终点的一切环路位相因子来定义规范场的等价类，然后又用一些称为“标准通路”的曲线弧的位相因子确定出类中的具体的规范场(称为给定规范)，这样就使得规范有了明确的意义. 我们再引入了标准微分环路位相因子的概念，它们的表达式是取值于李代数的一次微分形式，任一环路的位相因子可用它们作出(在非平凡的整体规范场的情况下，还需要另外一些环路位相因子). 这种微分环路的位相因子，具有良好的规范协变性，运用起来，往往比规范势更为方便，并且，它们又能和特定规范下的规范势相重合.

利用这种方法，我们很容易地得出两个规范场互相等价的充要条件和规范场可化约的充要条件. 并且证明，在给定的规范下，场的强度是决定规范场的(对整体规范场还要添加若干闭环路位相因子). 此外，用它来研究明可夫斯基时空中的规范场关于转动，平移的对称性是很方便的，我们指出了一般的方法，把问题转化为李群中不难处理的问题，并以 SU_2 规范场为例，作出具平移对称性和转动对称性的场的全体.

这个方法在另外的工作中陆续有所应用[4-6].

应当指出，环路位相因子相当于纤维丛理论中的和乐群元素[7]，但我们这里着眼于环

本文1976年4月26日收到.

路和和乐群元素的对应关系(可称为和乐映照),而不停留在抽象的和乐群性质上. 文中还证明,在已给定流形 M_n 后,和乐映照(满足可微分性)就可以定出以 M_n 为底的主纤维丛和相应的一个联络,也就是说,主纤维丛的结构是不必预先给出的.

(二) E_4 上的规范场和环路位相因子

设 G 为 r 维李群,E_4 为四维明可夫斯基时空,$\mathscr{F}$ 为 E_4 上定义的群 G 的规范场. 用积分形式表述[1],$\mathscr{F}$ 就是 E_4 上分段光滑曲线弧 G 中的一个对应: $\widehat{AB} \to \Phi_{BA} \in G$ 满足

(1) 同态条件: 若弧 $\widehat{ABC}$ 由 $\widehat{AB}$, $\widehat{AC}$ 组成,那末

$$\Phi_{CBA} = \Phi_{CB}\Phi_{BA}. \tag{2-1}$$

(2) 可微分条件: 微分弧 $AA + dA$ 对应的位相因子 Φ_{A+dAA} 由取值在 G 的李代数 g 中的微分形式

$$b = b^i_\lambda(x)dx^\lambda X_i \quad (\lambda = 1, 2, 3, 4;\ i = 1, \cdots, r) \tag{2-2}$$

确定,这里 X_i 是 g 的一组基,x 为点 A 的坐标,b^i_λ 或 $b_\lambda = b^i_\lambda X_i$ 称为 $\mathscr{F}$ 的规范势,b 称为规范势形式.

弧 $\widehat{AB}$ 所对应的 Φ_{BA} 可用如下方法作出: 设 $x = x(t)$ 是 $\widehat{AB}$ 的方程,$x(0) = A$, $x(1) = B$; 又 u 表示群 G 的元素,同时也表示它的一组坐标(不同坐标区域的坐标我们在记法上不加区别),$h(u, du)$ 表示 $(u + du)\cdot u^{-1}$ 所对应的李代数元素,以 $u(0) = e$(G 的单位元素)为初始条件解微分方程

$$h\left(u, \frac{du}{dt}\right) = b\left(x, \frac{dx}{dt}\right), \tag{2-3}$$

得到解 $u(t)$,那末 $\Phi_{BA} = u(1)$.

对于 E_4 上取值在 G 中的任一光滑函数 $S(x)$,定义

$$\Phi'_{BA} = S(B)\Phi_{BA}S^{-1}(A), \tag{2-4}$$

就得到另一规范场 $\mathscr{F}'$,$\mathscr{F}$ 到 $\mathscr{F}'$ 的转换称为规范变换,互为规范变换的场称为等价的,它们构成一个等价类.

取 O 为 E_4 的任一定点,不妨取为原点,用 l 记以 O 为始点和终点的环路,称为 O 环路,Φ_l 为 l 的位相因子,它是 O 环路全体所成的集合到 G 上的一个映照. 成立

定理 1. 两个规范场 $\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{F}'$ 相互等价的充要条件是存在 G 的一个元素 a,使得

$$\Phi'_l = a\Phi_l a^{-1} \tag{2-5}$$

对任何 O 环路 l 成立.

证明. 如 $\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{F}'$ 等价,取 $a = S(0)$,由 (2-4) 就得 (2-5) 式. 相反地,如 (2-5) 成立,设 $\widehat{AB}$ 为任一曲线弧,OA, OB 为直线段,令 l 为由 OA, $\widehat{AB}$, BO 所成的 O 环路(见图 1),那末

$$\Phi_{BA} = \Phi_{BO}\Phi_l\Phi_{OA},$$
$$\Phi'_{BA} = \Phi'_{BO}\Phi'_l\Phi'_{OA} = \Phi'_{BO}a\Phi_l a^{-1}\Phi'_{OA}. \tag{2-6}$$

如取 $S(P) = \Phi'_{PO}a\Phi_{OP}$,那末就成立 (2-4) 式,定理证毕.

从而知道,Φ_l 给出了规范场的等价类,但 Φ_l 是一个泛函,难以直接使用,因此我们再

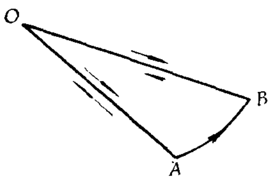

图 1

弧 $\widehat{AB} = \overline{AO}\widehat{OABO}\ \overline{OB}$

$\Phi_{AB} = \Phi_{BO}\Phi_{OBAO}\Phi_{OA}$

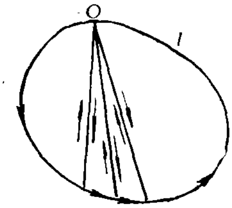

图 2　环路 l 的位相因子分解为微分三角形位相因子之积

引入微分三角形（标准微分环路）位相因子．先定义标准通路集合，它由直线段 OP 全体（或其微分同胚的象，但 O 不变)所组成，对任何一点 P，存在唯一的标准通路 $\overline{OP}$，它光滑地依赖于 P（$\overline{OP}$ 是直线线段或光滑的曲线弧，有时也可以是分段光滑）．由 $\overline{OA}$，微分弧 $AA + dA$，和 $\overline{A+dAO}$ 组成一个微分 O 环路，它对应的位相因子称为微分三角形（标准微分环路)位相因子，由取值在 g 的一次微分形式

$$k(x, dx) = k^i_\lambda(x)dx^\lambda X_i = k_\lambda dx^\lambda \tag{2-7}$$

所给出，这里 x 是点 A 的坐标．有了 k 以后，任一 O 环路的位相因子可以通过求解微分方程

$$h\left(u, \frac{du}{dt}\right) = k\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \tag{2-8}$$

得到(见图 2)，k 还应满足相容性条件

$$k^i_\lambda(x)v^\lambda(x) = 0, \quad k^i_\lambda(0) = 0, \tag{2-9}$$

这里 v^λ 是标准通路的切向量，这因为 dx^λ 和 v^λ 成比例时，微分环路退化为在曲线段 $Ox + dx$ 上来回一次，其位相因子必为单位元素，又当 $x = 0$ 时也有同样情况．

从上面的论述和定理 1 就推出：

定理 2. 规范场 $\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{F}'$ 等价的充要条件是存在 G 中的元素 a，使

$$k'(x, dx) = (ada^{-1})k(x, dx). \tag{2-10}$$

从而可见，标准环路位相因子决定了规范场的等价类[还容有 (ada^{-1}) 的不定性]．从这个等价类中作出具体的规范场的过程称为给定规范，它可以用下述的方法实现：作光滑的 G 值函数，令其为标准通路 $\overline{OP}$ 的位相因子 Φ_{PO}，那末任何曲线弧 $\widehat{AB}$ 的位相因子就由

$$\Phi_{BA} = \Phi_{BO}\Phi_{OBAO}\Phi_{OA} \ (\Phi_{OA} = \Phi^{-1}_{AO}) \tag{2-11}$$

确定下来了，规范场也就定出来了．特别，对微分弧 $AA + dA$

$$\Phi_{A+dAA} = \Phi_{A+dAO}\Phi_{OA+dAAO}\Phi_{OA}, \tag{2-12}$$

从而得出规范势形式

$$b = (\mathrm{ad}\,\Phi_{AO})k + \theta, \tag{2-13}$$

这里 θ 是 $\Phi_{A+dAO}\Phi_{OA}$ 所对应的 g 值微分形式．由 b 的定义及 k 的相容条件 (2-9) 可知，$\overline{OA}$ 的位相因子的确就是事先给好的 Φ_{AO}.

特别，令 $\Phi_{PO} = e$ 对一切 P 成立，我们有一个特殊的规范，这时 (2-13) 化为 $b = k$，因此，可以断言：b 和 k 的意义及变换规则虽然完全不同，但在 k 所确定的规范场等价类

中，存在一个规范场，其规范势形式就等于k. 这时可以由k利用通常的公式[1,2]来计算场强$f_{\lambda\mu}$和源J_μ等等.

总结上述事项，得到

定理 3. (1) 任意满足相容条件的g值一次微分形式k可以作为标准微分环路的位相因子，由它(本身还容许一个伴随变换)定出一个规范场的等价类.

(2) 任何O环路l的位相因子可以利用k通过求解微分方程(2-8)得到.

(3) 在给定了标准通路的位相因子之后，规范场就确定了，特别当$\Phi_{PO}=e$时，场的规范势形式和k重合.

微分形式k虽然在很大的程度上摆脱了规范不定性，但它依赖于点O及标准通路的选取，如果另取一系从O'出发的标准通路$O'P$，那末$k(x, dx)$应改为$k'(x, dx)$. 现在导出二者之间的关系：由闭环路$O'PP+dPO'$的定义可见

$$\begin{aligned}\Phi_{O'P+dPPO'} &= \Phi_{O'O}\Phi_{OO'P+dPPO'O}\Phi_{OO'}\\ &= \Phi_{O'O}\Phi_{OO'P+dPO}\Phi_{OP+dPPO}\Phi_{OPO'O}\Phi_{OO'},\end{aligned} \tag{2-14}$$

这里$\Phi_{OO'}$是可以任意给定的[相应于$k'(x,dx)$本身还容有的不定性]. $OO'PO$是闭环路，$\Phi_{OPO'O}$的值可以通过解微分方程(2-8)得出，是P的G值函数，记$\Lambda(x)=\Phi_{OPO'O}\Phi_{OO'}$，那末由$k'$和$k$的定义，从(2-14)就得出

$$k'(x, dx) = (\mathrm{ad}\Lambda^{-1}(x))k(x, dx) + h(\Lambda^{-1}, d\Lambda^{-1}). \tag{2-15}$$

(2-15)形式上和规范变换一致，但有不同的意义. 尽管如此，如果我们把k和k'都看成特殊规范下的规范势，那末(2-15)也可理解为规范变换. 应该指出，k依赖于点O及标准通路这样一种不定性，有时是可以很好地加以利用的，在讨论规范场的关于时空变换的对称性时，就充分地利用了这种不定性的.

先讨论k的两个应用.

第一是关于化约性问题. 如果$\mathscr{F}$经规范变换后能化为子群G'的规范场，那末$\mathscr{F}$就称为可化约的，从上述讨论立即就得出

定理 4. $\mathscr{F}$可化约于G'的规范场的充要条件是$\mathscr{F}$的标准微分环路位相因子k只取值于g的子代数g_1之中，这里

$$g_1 = (\mathrm{ad}\, a^{-1})g',$$

g'是G'的李代数，$a\in G$.

第二是场强在什么程度上决定场的问题. 这是规范场论很基本的一个问题. 设有两个规范场$\mathscr{F}_1$和$\mathscr{F}_2$，如果它们的标准通路位相因子相同，则称它们有共同的规范. 成立

定理 5. 有共同规范的两个规范场，如果它们的场强相同，那末它们的规范势必然相等.

证明. 不妨设标准通路的位相因子都是e，选坐标ξ^λ，使ξ^1表示标准通路的欧氏弧长，ξ^2, ξ^3, ξ^4表示标准通路在0点的方向，这种坐标在一个“立体角”内是有效的. 这时相容条件(2-9)化为

$$\underset{\alpha}{k}_1 = 0, \quad \underset{\alpha}{k}_i(0, \xi^2, \xi^3, \xi^4) = 0, \quad (\alpha = 1, 2,\ i = 2, 3, 4) \tag{2-16}$$

这里$\underset{1}{k}, \underset{2}{k}$分别记$\mathscr{F}_1$和$\mathscr{F}_2$的微分三角形位相因子. 从(2-16)和$f_{\lambda\mu}$的表达式知道

$$f_{\alpha}{}^{i}_{l} = -\frac{\partial}{\partial \xi^1} k_{\alpha}{}^{i}_{l}. \tag{2-17}$$

由 $\mathscr{F}_1$ 和 $\mathscr{F}_2$ 强度相等就推出

$$\frac{\partial}{\partial \xi^1}(k_1{}^i_l - k_2{}^i_l) = 0.$$

用(2-16)第二式，就推出 $k_1{}^i_l = k_2{}^i_l$ 因此就得到 $k_1 = k_2$，这就是需要证的事项，因为这时 b_α 重合于 k_α. 定理证毕.

对非 Abel 群的规范场，场强是随规范变化的，规范可解释为"测量"每点位相的一个参考系统，场强的数值是联系于参考系统的. 上述定理表明，对 4 维时空 E_4 而言，场强仍然是决定规范场的基本物理量，但场强所联系的参考系统也应同时给定. 这样就对场强是否决定规范场的问题，作了有明确物理意义的回答.

（三）E_4 上的规范场关于时空变换的对称性

用微分三角形位相因子方法来研究规范场在时空中的对称性是相当有效的，先以关于时间平移的对称性作一个例子.

定义. 如规范场 $\mathscr{F}$ 在时间平移

$$t' = t + v \tag{3.1}$$

下变为和自身等价的规范场，那末称 $\mathscr{F}$ 具有时间平移的对称性.

我们暂且讨论 SU_2 群的规范场. 我们取标准通路 $\overline{OP}$ 为折线 OP_1P，这里 P_1 是 P 在 t 轴上的正投影. 现用(x, t)记点 P 的坐标，x 记 x^1, x^2, x^3. 在平移(3.1)下，标准微分三角形（应称为标准微分环路）$L = OP_1PP + dPP_1 + dP_1O$ 变为 $L' = O'P_1'P'P' + dP'P_1' + dP_1'O'$，对于变后的场 $\mathscr{F}'$ 来说，L' 的位相因子是 L 的位相因子，但 L' 在 $\mathscr{F}$ 中的位相因子由

$$(\mathrm{ad}\Phi_{O'O})k(x, t+v)^*$$

决定，为使 $\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{F}'$ 等价，其充要条件是存在 $a(v) \in SU_2$，使

$$k(x, t) = (\mathrm{ad}a(v))(\mathrm{ad}\Phi_{O'O})k(x, t+v).$$

因为 $\Phi_{O'O}$ 也单是 v 的函数，所以这个充要条件也就是：存在 v 的函数$\sigma(v) \in SU_2$，使

$$k(x, t) = (\mathrm{ad}\sigma^{-1}(v))k(x, t+v), \tag{3.2}$$

从此就得出

$$(\mathrm{ad}\sigma(v_1+v_2))k(x, t) = (\mathrm{ad}\sigma(v_1))(\mathrm{ad}\sigma(v_2))k(x, t),$$

即

$$(\mathrm{ad}\sigma^{-1}(v_1+v_2))(\mathrm{ad}\sigma(v_1)\mathrm{ad}\sigma(v_2))k(x, t) = k(x, t). \tag{3.3}$$

如果 $\mathscr{F}$ 不化约，即 $k(x, t)$ 不属于某一一维子代数，那末

$$\mathrm{ad}\sigma(v_1+v_2) = \mathrm{ad}\sigma(v_1)\mathrm{ad}\sigma(v_2),$$

这表示 $v_1 \to \mathrm{ad}\sigma(v_1)$ 是一个同态对应，所以重选了 SU_2' 的基以后，(3.2) 可写成

$$k(x, t+v) = (\mathrm{ad}\exp(qvX_1))k(x, t) \tag{3.2'}$$

的形式，特别令 $t = 0$，$v = t$，我们得

---

* 在本节中我们把$k(x, t, dx, dt)$简记为 $k(x, t)$.

$$k(x, t) = (\mathrm{ad}\exp(qtX_1))k(x, 0), \tag{3.4}$$

这里的 $k(x, 0)$ 是任意的，但要满足相容条件

$$k_i(x, 0)x^i = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad k_4(0, t) = 0, \quad k_\mu(0, 0) = 0. \tag{3.5}$$

当 $q \neq 0$ 时，$k(x, t)$ 关于 t 具周期性，从而得到

定理 6. 具时间平移对称性的 SU_2 规范场分三种类型：

(1) 化约为 U_1 群的规范场，即静态的电磁场.

(2) 严格的静态的场，此时 $k(x, t)$ 和 t 无关.

(3) 关于 t 具周期性的场，k 的表达式为 (3.4)，$q \neq 0$.

对情形 (3) 利用 $\exp(-qtX_1)$ 对 (3.4) 作规范变换可以得到和 t 无关的规范势

$$b(x, t) = k(x, 0) - qX_1 dt.$$

具空间平移对称性的 SU_2 场是完全类似的.

用同样方法可以讨论轴对称的 SU_2 规范场. 这时标准通路可改选为 OP_1P，这里 P_1 为 P 在 OZ 轴上的投影. 如用柱面坐标 (ρ, φ, z, t)，我们有相容条件

$$k_\rho\rho + k_t t = 0, \quad k_z(0, 0, z, 0) = 0, \quad k(0,0,0,0) = 0, \tag{3.6}$$

成立:

定理 7. 具轴对称性的 SU_2 规范场分三种类型：

(1) 化约为 U_1 群的规范场，成为轴对称的电磁场.

(2) 严格轴对称的，即 k 和 φ 无关.

(3) k 由

$$k(\rho, \varphi, z, t) = (\mathrm{ad}\exp(n\varphi X_1))k(\rho, 0, z, t) \tag{3.7}$$

决定，式中 n 为非 0 整数，$k(\rho, 0, z, t)$ 只需满足相容条件

$$k_\rho(\rho, 0, z, t)\rho + k_t(\rho, 0, z, t)t = 0, \quad k_z(0, 0, z, 0) = 0, \quad k(0,0,0,0) = 0. \tag{3.8}$$

在第三种情形下，当空间绕 Z 轴转 θ 角时，如在同位旋空间同时绕 X_1 轴转 $-n\theta$ 角，能使 k 保持不变.

我们也可用同样方法讨论球对称的 SU_2 规范场，结果和文 [8] 相符，但那时空间原点可以为奇点，所以还有独立讨论的必要.

从上述讨论已可看清，对于一般的李群的规范场，这几种对称性的讨论均可用如下的步骤进行：

(1) 选取适当的标准通路；

(2) 如有非平凡的 $\mathrm{ad}\, a$ 使 $(\mathrm{ad}\, a)k = k$，那末场必为化约的，可归结为研究子群的规范场；

(3) 如 $(\mathrm{ad}\, a)k = k$ 必推出 $\mathrm{ad}\, a = \mathrm{ad}\, e$，那末问题就归结为讨论时空对称群到 $\mathrm{ad}\, G$ 的子群有哪些同态形式的问题.

对于一般的球对称规范场，可参阅 [5].

(四) 整体规范场的环路位相因子

[3] 中已阐明，在研究某些物理问题时，需要用到整体规范场. 先简述一下定义.

设 M_n 为连通微分流形（物理学中 $n=4$，可以是 E_4 除去某些点集所成），G 是一李群，M_n 上的整体规范场是指：(1)已将 M_n 划分为若干开区域的和集 $M_n=UV_a(a=0, 1, \cdots)$，V_a 称为分解域，M_n 上的曲线弧 $\widehat{PQ}$ 往往要注明为 $\widehat{P_aQ_b}$ $(P\in V_a,\ Q\in V_b)$，如又有 $P\in V_c(c\neq a)$，则 $\widehat{P_aQ_b}$ 和 $\widehat{P_cQ_b}$ 有不同的意义；(2) 存在 $\widehat{P_aQ_b}$ 到 G 的元素 $\Phi_{Q_bP_a}$ 的一个对应，它满足

(i) 同态条件：

$$\Phi_{R_cQ_bP_a}=\Phi_{R_cQ_b}\Phi_{Q_bP_a}, \tag{4.1}$$

(ii) 可微分条件：$\Phi_{P_a+dP_aP_a}$ 由 V_a 上取值在李代数 g 中的一次微分形式 $\underset{a}{\omega}=\underset{a}{b}{}^i_\lambda(x)dx^\lambda X_i$ 决定.

根据这两个条件，我们可以求出任何曲线弧的位相因子. 特别若 $P\in V_a\cap V_b$，称 P_bP_a 为 P 点的一个转换，$S_{ba}(P)=\Phi_{P_bP_a}$ 称为转换函数，它满足

$$S_{ca}(P)=S_{cb}(P)S_{ba}(P),\ (P\in Va\cap Vb\cap Vc). \tag{4.2}$$

又 $\underset{a}{\omega}$, $\underset{b}{\omega}$ 和 S_{ab} 之间应满足关系

$$\underset{b}{\omega}=(\mathrm{ad}\,S_{ba}(P))\underset{a}{\omega}+\underset{ba}{\theta}, \tag{4.3}$$

$\underset{ba}{\theta}$ 由 $S_{ba}(P+dP)S_{ab}(P)$ 决定[6]. 这保证 $\Phi_{R_cQ_bP_a}$ 和点 Q_b（在同一曲线弧上）的选取无关.

如果在 M_n 上给定群 G 的两个整体规范场 $\mathscr{F}_1$ 和 $\mathscr{F}_2$，我们不妨假设 $\mathscr{F}_1$ 和 $\mathscr{F}_2$ 有共同的分解域[9]，这时场 $\mathscr{F}_1$ 和 $\mathscr{F}_2$ 相等价的定义化为存在函数 $S_a(P)(P\in V_a,\ a=0, 1, \cdots)$ 使

$$\underset{1}{\Phi}_{Q_bP_a}=S_b(Q)\underset{2}{\Phi}_{Q_bP_a}S_a^{-1}(P)\quad P\in V_a\cap V_b\cap V_c), \tag{4.4}$$

对于任何的 $\widehat{P_aQ_b}$ 成立.

现开始叙述环路位相因子方法. 设 O 为 M_n 上的一个定点，设 $O\in V_o$，以 O_o 为始点和终点的环路 l 称为 O_o 环路，类似于定理 1，我们有

定理 8. 场 $\mathscr{F}_1$ 和 $\mathscr{F}_2$ 相等价的充要条件是存在 $a\in G$，使

$$\underset{1}{\Phi}_O(l)=a\underset{2}{\Phi}_O(l)a^{-1} \tag{4.5}$$

对一切 O_o 环路 l 成立，这里 $\underset{\alpha}{\Phi}_O(l)(\alpha=1, 2)$ 为 l 在 $\mathscr{F}_\alpha$ 中的位相因子.

证明和定理 1 相类似，故从略. 这定理说明整体规范场的等价类也是由 O_o 环路的位相因子决定的.

现在考虑如何建立标准通路的问题. 设 $M_n=UV_a$，而且每一 V_a 和 n 维欧氏空间 E_n 同胚，选 $A_a\in V_a$, $B_b\in V_b$, $\cdots$，又对每一 V_a，已选定一组特殊的曲线弧集合 $\overline{A_aP_a}$（称为支路）使和(二)中的标准通路具相同性质. 又选定一组曲线弧 O_oA_a, O_oB_b, $\cdots$（称为干路）使它们具如下形式

$$O_oA_a=\overline{O_oQ_o}Q_oQ_c\overline{Q_cC_c}\cdots\overline{D_dR_d}R_dR_a\overline{R_aA_a},$$

右边 $\overline{O_oQ_c}$, $\overline{Q_cC_c}\cdots$ 等是支路，又到 C_c, D_d 等为止的截段 O_oC_c, O_oD_d 也是干路，又这里，Q_oQ_c, $\cdots R_dR_c$ 是 $Q, \cdots, R$ 的转换. 我们称 $O_oA_a\overline{A_aP_a}$ 为标准通路，记为 $\overline{O_oP_a}$，又 O_oA_a 也是标准通路，记为 $\overline{O_oA_a}$. 总之，标准通路是由干路和支路连接而成，干路本身也是标准通路，并且标准通路 $\overline{O_oP_a}$ 对于任何的 P_a 均应是唯一的（见图 3). 又称 $\overline{O_oP_a}P_aP_a$ +

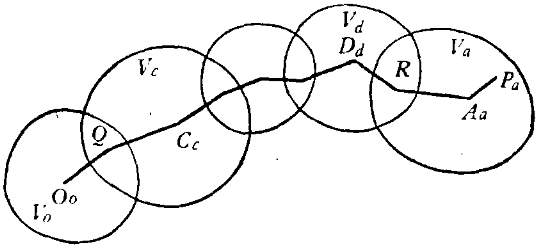

图 3

O_oQ_o, O_oQC_c, $O_oQC_c\cdots D_d$, $O_oQC_c\cdots D_dR_d$, $O_oQC_c\cdots D_dRA_a$, $O_oQC_c\cdots D_dRA_aP_a$ 为标准通路 $\overline{O_oQ_c}$, $\overline{O_oC_c}$, $\overline{O_oD_d}$, $\overline{O_oR_d}$, $\overline{O_oA_a}$, $\overline{O_oP_a}$

$dP_a\overline{P_a} + \overline{dP_aO_o}$ 为标准微分环路，它的位相因子由取值在李代数中的一次微分形式

$$\underset{a}{k} = \underset{a}{k}{}^i_\mu dx^\mu X_i \tag{4.6}$$

给出． 此外，当 $P\in V_a\cap V_b$ 时，我们又把环路 $\overline{O_oP_a}P_aP_b\overline{P_bO}$ 的位相因子记为 $\psi_{ba}(P)$. 若 P 是某一干路 $\overline{O_oB_b}$ 上的转换点，即成立 $\overline{O_oB_b} = \overline{O_oP_a}P_aP_b\overline{P_bB_b}$，则 $\overline{O_oP_a}P_aP_b\overline{P_bO_o} = \overline{O_oB_b}\,\overline{B_bO_o}$，故必有 $\psi_{ba}(P) = e$. 成立:

定理 9. (1) M_n 上任何 O_o 环路的位相因子可由 $\underset{a}{k}$ 和 ψ_{ab} 作出 $(a, b = 0, 1, \cdots)$.

(2) $\underset{a}{k}$ 和 ψ_{ab} 之间必满足下列三组相容性条件:

(i) 当 $P\in V_a\cap V_b$ 时，

$$\underset{b}{k} = (\mathrm{ad}\,\psi_{ba})\underset{a}{k} + \underset{ba}{\tau}, \tag{4.7}$$

式中 $\underset{ba}{\tau}$ 为 $\psi_{ba}(P+dP)\psi_{ab}(P)$ 所定出的李代数元素.

(ii) 如 $v^\mu_a(x)$ 为 $\overline{O_ox_a}$ 在 x_a 点的切向量 $(x_a \neq A_a)$，成立

$$\underset{a}{k}{}_\mu v^\mu_a(x) = 0, \quad \underset{a}{k}{}_\mu(A_a) = 0. \tag{4.8}$$

(iii) 如 $P\in V_a\cap V_b\cap V_c$ 则

$$\psi_{ca}(P) = \psi_{cb}(P)\psi_{ba}(P). \tag{4.9}$$

(3) 满足相容条件 (4.7), (4.8), (4.9) 的一组 $\underset{a}{k}$ 和 ψ_{ba}，必可作出群 G 的规范场 $\mathscr{F}$，使 $\underset{a}{k}$, ψ_{ba} 作为标准微分环路的位相因子和环路 $\overline{O_oP_a}P_aP_b\overline{P_bO}$ 的位相因子.

(4) 两个规范场(设已具相同的分解域及取好同样的标准通路)等价的充要条件是存在 $a\in G$，使得

$$\underset{a}{k_1} = (\mathrm{ad}\,a)\underset{a}{k_2}, \quad \underset{1}{\psi_{ab}} = a\underset{2}{\psi_{ab}}a^{-1}. \tag{4.10}$$

(5) 规范场 $\mathscr{F}$ 化约为群 G 的子群 G' 的规范场的充要条件是

$$\psi_{ab}\in G', \quad \underset{a}{k}\in g', \tag{4.11}$$

这里 $g_1 = (\mathrm{ad}\,a)g'$, $G_1 = (\mathrm{ad}\,a)G'$, g' 是 G' 的李代数，$a\in G$.

【证明】 (1) 可以把任一 O_o 环路的位相因子分解为标准微分环路的位相因子和 ψ_{ba} 的乘积. 具体说来，设 O_o 环路 l 有一段穿过 V_a，又设我们已求得了 $\widehat{O_oP_a}\overline{P_aO_o}$ 的位相因子，这里 $\widehat{O_oP_a}$ 是 l 上的一段，那末用 $\underset{a}{k}$ 就能求出 $\widehat{O_oP_a}\widehat{P_aR_a}\overline{R_aO_o}$ 的位相因子，这里 $\widehat{P_aR_a}$

是 l 上和 $\widehat{O_oP_a}$ 相连的一段. 如果 $R\in V_a\cap V_b$, 乘上 $\psi_{ba}(R)$ 就得出 $\widehat{O_oP_a}\widehat{P_aR_b}\overline{R_bO_o} = \widehat{O_oR_b}\overline{R_bO_o}$ 的位相因子. 陆续用这个手续,就能算出整个 l 的位相因子(见图 4).

(2) 在上面的计算中,如果选 $R+dR$ 为由 V_a 到 V_b 的转换点,计算结果应不变,因而应有

$$\Phi_{O_oR_b+dR_b}\Phi_{R_b+dR_bR_b}\Phi_{R_bO_o}\psi_{ba}(R) = \psi_{ba}(R+dR)\Phi_{O_oR_a+dR_a}\Phi_{R_a+dR_aR_a}\Phi_{R_aO_o}$$

这就是相容条件(4.7). 相容条件(4.8)的导出和 E_4 情形相同,(4.9) 由 ψ_{ba} 的定义直接看出.

(3) 我们令标准通路的位相因子 $\Phi_{P_aO_o}=e$,那末一切曲线弧的位相因子也就得出来了,这时 $\underset{a}{k}$ 可看作 V_a的势形式, ψ_{ba} 可看作转换函数,由相容条件知道它们给出了一个规范场, 而依 $\overline{O_oP_a}$ 的作法及相容条件知道 $\Phi_{P_aO_o}$ 的确是 e.

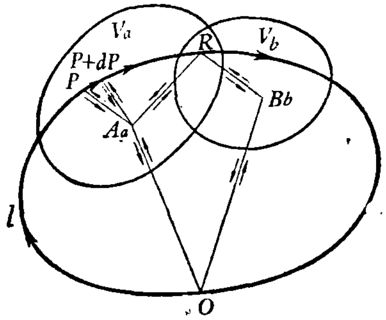

图 4

$O_oP_aP_a+dP_a = O_oP_aA_aO_oA_aP_aP_a+dP_a$

$O_oPR_b = O_oPR_aA_aO_oA_aR_aR_bB_bO_oB_bR_b$

(4) 可由 (1) 及定理 8 推出.

(5) 采用 (3) 中所作的规范场, 依 (1) 和 (4.11) 推出任何弧的位相因子属于 G', 所以 $\mathscr{F}$ 是化约的. 定理证毕.

这样我们就对一般的整体规范场提出了位相因子方法, 并已证明了有关化约性和等价性的定理.

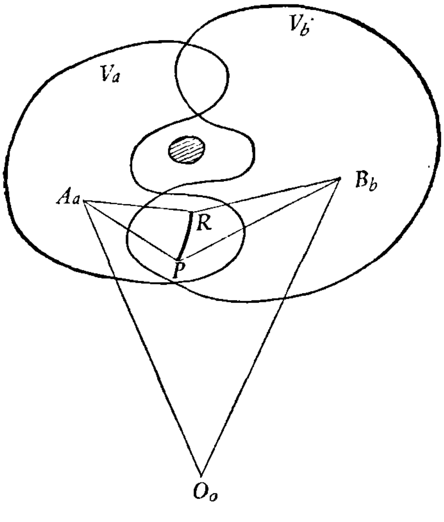

图 5

$\overline{O_oP_a}P_aP_b\overline{P_bO_o}$

$= \overline{O_oP_a}P_aR_a\overline{R_aO_o}\ \overline{O_oR_a}R_aR_b\overline{R_bO_o}\ \overline{O_oR_b}R_bP_b\overline{P_bO_o}$

$\overline{O_oP_a}=O_oA_aP_a \quad \overline{O_oP_b}=O_oB_bP_b$

$\overline{O_oR_a}=O_oA_aR_a \quad \overline{O_oR_b}=O_oB_bR_b$

附注 1. 在给出规范场的等价类时, 不必要给出所有的 $\psi_{ba}(P)$, $P\in V_a\cap V_b$, 例如, 对 $V_a\cap V_b$的一个连通分支,如有一点R的$\psi_{ba}(R)$为已知[特别若 $O_o\cdots A_aR_aR_bB_b$为标准通路时, $\psi_{ba}(R)=e$], 就可以根据 $\underset{a}{k}$ 和 $\underset{b}{k}$ 作出在这个连通分支上的 $\psi_{ba}(P)$ 来. 事实上, 在 $V_a\cap V_b$ 中, 曲线弧 $\widehat{RP}$, $\overline{O_oP_a}P_aP_b\overline{P_bO_o}$ 的位相因子可分解为 $\overline{O_oP_a}\widehat{P_aR_a}\overline{R_aO_o}$, $\overline{O_oR_a}R_aR_b\overline{R_bO_o}$, $\overline{O_oR_b}\widehat{R_bP_b}\overline{P_bO_o}$ 的位相因子的乘积, 这里第一和第三环路位相因子由 $\underset{a}{k}$ 和 $\underset{b}{k}$ 可作出, 而第二个因子就是 $\psi_{ba}(R)$ (见图 5). 当然,相容条件还是需要的.

我们还要指出, 整体规范场是可以用环路位相因子为出发点来定义的.

在已给的连通微分流形 M_n 上任取一点 O, 设 O 环路的集合到群 G 的对应 $l\to\Phi_l$ 满足

(1) 同态条件: 若 l 由 l_1 和 l_2 连接而成,则

$$\Phi_l=\Phi_{l_2}\Phi_{l_1}.$$

(2) 可微分条件：对任一点 $A\in M_n$，必有一和 E_n 同胚的邻域 V，使在 V 中给了以 A 为中心的标准通路(支路)后，使得微分闭环路 $OAPP+dPAO(P\in V)$ 的位相因子由 g 值微分形式 $k(x, dx)$ 给出.

那末，根据 Φ_l 就可以定义出整体规范场来. 事实上，可选有限个或可列无限个点 A_a (O 为 A_a 之一)，作相应的 V_a，使 $M_n=UV_a$，以 V_a 为分解域，依前面所述的方式作标准通路，就得出 ψ_{ab} 和 $k_a(x, dx)$ 的集合，由同态条件 (1) 及可微分条件 (2) 就可见到，任何 O 环路位相因子可依定理 9 证明 (1) 中的方式重新作出，而且 ψ_{ab} 和 k_a 必满足相容条件 (4-7)，(4-8)，(4-9) 从而定义出一个规范场等价类，又如给定了特殊的规范，就得出了规范场 $\mathscr{F}$.

如果我们选用另一种分解方式 $M_n=UW_\alpha$ 及另外的标准通路，那末就有另一组 $\psi_{\alpha\beta}$ 和 $k_\alpha(x, dx)$，从而定出另一规范场 $\mathscr{F}'$，参照 $\mathscr{F}'$，环路位相因子仍为 Φ_l，因而 $\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{F}'$ 是等价的规范场. 所以得到

定理 10. 满足条件 (1)，(2) 的映照 Φ_l 唯一地确定了规范场的等价类

注 2. 满足条件 (1)，(2) 的对应 Φ_l 可称为流形 M_n 上的和乐映照，由它就能定出以 M_n 为底的一个主纤维丛及其上的一个联络.

注 3. 定理 10 中所说的 $\mathscr{F}$ 到 $\mathscr{F}'$ 的规范变换可具体给出如下：设 W_α 相应的中心为点 R_α，$\mathscr{F}'$ 相应的标准通路为 OR_α 及 $OR_\alpha P_\alpha$ $(P\in W_\alpha)$ 把 V_a，W_α 都作为分解域，若 $P\in V_a\cap W_\alpha$，把环路 $OA_aPR_\alpha O$ 的位相因子作为 $\psi_{\alpha a}(P)$，$\psi_{a\alpha}=\psi_{\alpha a}^{-1}$，依定义可以明显地推出

$$\psi_{\alpha a}(P)\psi_{ab}(P)=\psi_{\alpha b}(P)\quad(P\in W_\alpha\cap V_a\cap V_b),$$
$$\psi_{\alpha\beta}(P)\psi_{\beta a}(P)=\psi_{\alpha a}(P)\quad(P\in W_\alpha\cap W_\beta\cap V_a).$$

此外，由环路关系

$$OA_aPP+dPA_aO=OA_aPR_\alpha OR_\alpha PP+dPR_\alpha OR_\alpha P+dPA_aO,$$

得

$$\Phi_{OA_aP+dPPA_aO}=\psi_{a\alpha}(P+dP)\Phi_{OR\alpha P+dPPR_\alpha O}\psi_{\alpha a}(P).$$

从此就得出

$$k_a(x, dx)=(\mathrm{ad}\psi_{a\alpha})k_\alpha(x, dx)+h(\psi_{a\alpha}(P), d\psi_{\alpha a}(P)).\qquad(4\text{-}12)$$

这就是 k_a 和 k_α 间的转换关系.

注 4. 如果我们给定的是关于点 O' 的闭环路位相因子 $\Phi_{l'}$，同时又存在 $a\in G$ 使

$$\Phi_{l'}=(\mathrm{ad}\,a)\Phi_l$$

对任何 l' 成立，这里 $l=OOl'O'O, OO'$ 为取定的弧，那末，由 $\Phi_{l'}$ 所定出的规范场和由 Φ_l 所定出的规范场属于同一等价类.

注 5. 定理 5 可推广如下：如果 M_n 上有两个规范场 $\mathscr{F}_1$ 和 $\mathscr{F}_2$，满足如下条件：

(1) 对于 M_n 的同一分解 $M_n=UV_a$ 和同一组标准通路，标准通路的位相因子相同(不妨取为 e).

(2) 在 $V_a\cap V_b$ 的每一无干路通过的连通分支上，各有一点 P，使 $\underset{1}{\psi_{ab}}(P)=\underset{2}{\psi_{ab}}(P)$.

(3) 在各个 V_a 中依 $\underset{\alpha}{k_a}(\alpha=1, 2)$ 所作的规范场强度相同，那末 $\mathscr{F}_1$ 和 $\mathscr{F}_2$ 等价.

这事项是由本节注 1，定理 9 和定理 5 直接推出的，由此可见，在非 Abel 规范场的情况，在标准通路位相因子已给的条件下，场的强度及若干个闭环路位相因子决定了规范场．

作者非常感谢杨振宁教授，他和作者就有关的题材作了多次有益的讨论．

参　考　资　料

[1] C. N. Yang (杨振宁), *Phys. Rev. Lett.*, **33** (1974), 445.
[2] 谷超豪、杨振宁, Scientia Sinica, **18** (1975), 483; 复旦学报(自然科学版), 1975, **2**.
[3] T. T. Wu (吴大峻) and C. N. Yang, *Phys. Rev.*, **D12** (1975), 3845.
[4] 谷超豪、杨振宁, *Scientia Sinica*, **20** (1977), 47; 复旦学报(自然科学版), 1976, **3**、**4**, 146.
[5] 谷超豪，复旦学报(自然科学版), 1977, **2**, 30.
[6] 胡和生，关于规范场的化约性(未发表).
[7] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, Vol. I, chap. 2 (1963).
[8] 谷超豪、胡和生，物理学报, **26** (1977), 155.
[9] 谷超豪，复旦学报(自然科学版), 1975, **4**, 83; 中国科学, 1976, **3**, 320.

THE LOOP PHASE-FACTOR APPROACH TO GAUGE FIELDS

GU CHAO-HAO

(*Futan University*)

ABSTRACT

The gauge field theory is formulated via loop phase factors with a fixed point O as their initial and final point. Let G be the gauge group. When the base space is the Minkowski space E_4, we introduce a set of standard paths Ox (for example, the set of line segments Ox), where x is arbitrary. The phase factor for the infinitesimal loop $Oxx+dxO$ corresponds to an element in the Lie algebra g and can be expressed as a g-valued differential form $k(x, dx)$ which satisfies the following conditions of consistency

$$\text{(a)} \quad k(O, dx) = 0, \qquad \text{(b)} \quad k(x, v) = 0,$$

where v is the tangential vector of Ox at x. It is shown that an equivalent class of gauge fields is determined by $k(x, dx)$ or $(ad\, a)\, k(x, dx)$ where a is a fixed element of G. Hence if we adopt $k(x, dx)$ for the fundamental physical quantity of a gauge field then a great part of gauge indefiniteness is eliminated. Moreover if the phase factors Φ_{xO} for standard paths Ox are given then the phase factors for differential arcs $x\ x+dx$ are easily calculated, and hence a gauge field in the equivalent class is extracted. We call the set of phase factors for standard paths a gauge and $k(x, dx)$ may be interpretated as the gauge potential under a special gauge under which $\Phi_{xO} =$ the unit element of G.

The method is useful in considering the equivalence problem and the space-time symmetry of gauge fields. For example, it is quite easy to determine all spherically symmetric gauge fields if they are free of singularities. By using the method it can also be proved that if two gauge fields have the same gauge and the same field strength then their gauge potentials are equal to each other. Consequently, under a given gauge in the above sense the field strength determines the gauge potential completely.

For a general base manifold M_n, every equivalent class of gauge fields over M_n can be defined by loop phase factors also. In this case, M_n is expressed as the sum of a set of neighborhoods each of which is homeomorphic to the Euclidean space. The standard paths are constructed according a certain rule, the phase factors for standard differential loops are also introduced. The transition functions and gauge potentials of a gauge field in the given equivalent class are derived as the phase factors for some finite loops and standard differential loops respectively. Further it is remarkable that a global gauge field is determined completely by the field strength and some discrete loop factors, if the phase factors for the standard paths are gwen.

In mathematical terminology principal G-bundle structure as well as a connection in it is determined by the holonomic mapping which maps the set of loops through a fixed point into the group G, provided the mapping is differentible in a certain.

The author is very grateful to Prof. Yang Chen Ning for many helpful discussions.