

旋量磁单极解是允许的

王明中 郑希特 汪克林 章正刚 沈鼎昌
(成都工学院物理组) (成都地质学院物理组) (中国科学院高能物理研究所)

摘 要

本文通过旋量场与 Higgs 场的相互作用的引入,在非亚贝尔规范群的情况下,证明了包含旋量场的磁单极解的存在。在这个解中,旋量场的分布不是 SLAC 模型那样的球壳分布,而是球体内的分布。

(一) 引 言

在规范场理论中,不仅考虑规范场与 Higgs 场,而且也包括旋量场的问题是一个很有意思的问题。Bardeen 等人^[1]曾经试图通过 Higgs 场与费米场的耦合来解决费米子夸克在“基本”粒子内的“囚禁”问题。他们得到夸克粒子在“基本”粒子内部分布的一种球壳解。这结果虽然与目前从实验事实推测的层子在“基本”粒子内部的分布相去甚远,但其设想引起了广泛的重视。

另一方面,自 't Hooft^[2] 得出磁单极解后,就一直有人尝试得到包括旋量场的磁单极解,但都得到否定的结果。Swank 等人^[3]甚至证明不应存在旋量磁单极解,因此只能把“纯”磁单极的规范场和 Higgs 场作为外场来讨论旋量场在此外场作用下的稳定解问题。

包括旋量场的磁单极解之所以受到注意,是因为它也许会给出层子在“基本”粒子内“磁囚禁”的图象,从而构造一种场论的“基本”粒子结构模型。此外,最近对荷电粒子在磁单极场中运动时整个系统的统计性质感到兴趣^[4-6],在这些工作中,磁单极子被看成玻色子。如果有旋量磁单极子存在,而它应被看作费米子时,这些讨论又会得到什么结果将是一个值得关注的问题。

过去得到的磁单极解在不包括旋量场时,远处的渐近解比较清楚,而原点附近的性质则不够清楚。会不会在中心处有相当于“源”的其它场存在呢?而正是由于这种“源”的存在使得解在原点处由奇异变为有限的呢?自然会设想这可能是旋量场。如果是这样,这同时还能实现把层子“囚禁”到磁单极的想法。

Swank 等人^[3]是在一个没有旋量场和 Higgs 场直接耦合的前提下证明旋量磁单极是不存在的。如果引入这种耦合结果又会怎样? Bardeen 等人^[1]在亚贝尔情形下引入了这样的耦合。Jackiw 等人^[7]用这种耦合的矢量形式仍只能把“纯”磁单极作为外场来解旋量场的零能稳定解问题。我们引入标量的耦合证明 Swank 等人的结论不再成立。只要耦

合常数满足一定条件,就一定存在旋量场和磁单极系统的束缚态。

在第二节中将写下系统的拉氏函数,并由之导出各种场应满足的运动方程。

在第三节中讨论远处及原点附近的渐近解,说明这种解是孤子解。

第四节讨论解为束缚态的条件。

第五节给出在一个特殊情形下的全面解的例子。所得到的解在原点附近和远处都是有限的。旋量场集中在原点附近,与 Bardeen 等人^[1]得到的球壳分布不同,它是一种球状分布。在远处及原点附近的规范场及 Higgs 场的分布与 Prasad 等人^[6]在没有旋量时得到的有限解相同。从本文的讨论可以看到,解在原点处也为有限的物理机制是由于在原点附近有一个旋量场作为“源”的空间分布的存在。

(二) 运动方程组

我们采用的拉氏函数为

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} + \frac{1}{2} D_\mu Q_a D^\mu Q_a + \frac{\mu^2}{2} Q_a^2 - \frac{\lambda}{8} (Q_a^2)^2 + i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi + G\bar{\psi}(Q_a^2)^{1/2}\psi, \quad (1)$$

其中 $G_{\mu\nu}^a$ 是规范场强, Q_a 为 Higgs 场, ψ 为旋量场, m 是旋量场的质量。式中最后一项为旋量场与 Higgs 场的直接耦合。由于所用的规范群为 $SU(2)$ 群,故有

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g\epsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \\ D_\mu Q_a &= \partial_\mu Q_a + g\epsilon^{abc} A_\mu^b Q_c, \\ D_\mu\psi &= \partial_\mu\psi - ig\frac{\tau_a}{2} A_\mu^a\psi. \end{aligned} \quad (2)$$

由拉氏函数式(1)导出各种场所满足的方程组如下

$$D^\mu \mathbf{G}_{\mu\nu} + g\mathbf{Q} \times D_\nu \mathbf{Q} + \frac{g}{2} \bar{\psi} \boldsymbol{\gamma}_\nu \boldsymbol{\tau} \psi = 0, \quad (3)$$

$$D^\mu D_\mu \mathbf{Q} - \mu^2 \mathbf{Q} + \frac{\lambda}{2} Q^2 \mathbf{Q} - 2G\bar{\psi} \mathbf{Q} \psi = 0, \quad (4)$$

$$(i\boldsymbol{\gamma}^\mu D_\mu - m)\psi + G(Q_a^2)^{1/2}\psi = 0. \quad (5)$$

现在来讨论,在方程(3-5)中,有无旋量粒子的束缚态解及异于 SLAC 模型的经典解。设解的形状为:

$$\begin{aligned} A_i^a &= \epsilon_{ian} \hat{r}^n \frac{\phi(r) - 1}{gr}, & A_0^a &= 0, \\ Q_a &= \hat{r}^a \frac{\Pi(r)}{gr}, \\ \psi &= e^{-iEt} \begin{pmatrix} \zeta \\ \xi \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (6)$$

其中 $r \equiv (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$, $\hat{r}^a \equiv x^a/r$, ζ 及 ξ 是旋量的上、下分量,

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}} u(r) \chi, \quad \xi = \frac{1}{\sqrt{2}} v(r) (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{f}) \chi,$$

$$\chi = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

圆括号部份是同位旋空间的旋量。

将式(6)、(7)代入方程(3)–(5), 经过如下的变量变换及函数变换:

$$\begin{aligned} M &\equiv gF = g \sqrt{\frac{4\mu^2}{\lambda}}, \\ \beta &\equiv \frac{\lambda}{g^2}, \quad x \equiv Mr, \\ u(r) &\equiv M^{3/2} \frac{R(x)}{x}, \quad v(r) \equiv M^{3/2} \frac{S(x)}{x}, \end{aligned} \quad (8)$$

其中 M 为自发破缺后中间玻色子的质量, 经过一些运算后, 便可得到如下的径向运动方程组:

$$\begin{cases} x^2 \phi'' - \phi^3 + \phi(1 - \Pi^2) = -g^2 x R S, & (9) \\ x^2 \Pi'' - 2\Pi\phi^2 + \frac{\beta}{2}(x^2 \Pi - \Pi^3) = -g G x (R^2 - S^2), & (10) \\ R' - \frac{R}{x} \phi = \left(\frac{m + E}{M} - \frac{G}{g} \frac{\Pi}{x} \right) S, & (11) \\ S' + \frac{S}{x} \phi = \left(\frac{m + E}{M} - \frac{G}{g} \frac{\Pi}{x} \right) R, & (12) \end{cases}$$

这是一组四个函数的联立微分方程。

(三) 渐近解

现在来讨论这四个函数的渐近解。

(i) 远处的渐近解

$$\text{令 } x \rightarrow \infty \text{ 时, } \quad \Pi \rightarrow x, \quad \phi \rightarrow 0, \quad (13)$$

则方程(11)及(12)变成

$$\begin{cases} R' = \eta_+ S, & x \rightarrow \infty \\ S' = \eta_- R, \end{cases} \quad (14)$$

其中 $\eta_{\pm} \equiv \left(\frac{m \pm E}{M} - \frac{G}{g} \right)$. 由式(14)可得 R 及 S 的渐近解为

$$R, S \sim e^{-\sqrt{\eta_+ \eta_-} x}, \quad \text{当 } x \rightarrow \infty. \quad (15)$$

把(15)代入方程(9)及(10), 当 x 足够大时, 它们就是 't Hooft 解所满足的方程, 而 't Hooft 解正是满足条件(13)的. 可见式(13), (15)是所求的解在远处的渐近行为。

(ii) 原点附近的渐近解

对求解函数作级数展开, 代入方程(9)–(12), 便得到展开系数的代数方程, 由之解出

$$\begin{aligned}
 \phi &= 1 + ax^2 + O(x^4), \\
 \Pi &= bx^2 + O(x^4), \quad \text{当 } x \rightarrow 0 \text{ 时}, \\
 R &= cx + r_+ dx^2 + O(x^3), \\
 S &= dx + \frac{r_-}{3} cx^2 + O(x^3),
 \end{aligned} \tag{16}$$

其中 a, b, c, d 为待定系数, $r_{\pm} \equiv \frac{m \pm E}{M}$.

这样, 我们所求的解在远处及原点处都无奇异性. 由于系统的哈氏量为

$$\begin{aligned}
 H &= H_{YM} + H_H + H_D, \\
 H_{YM} &= \frac{4\pi M}{g^2} \int_0^{\infty} dx \left[\phi'^2 + \frac{(\phi - 1)^2}{2x^2} \right], \\
 H_H &= \frac{4\pi M}{g^2} \int_0^{\infty} dx \left[\frac{\Pi^2 \phi^2}{x^2} + \frac{1}{2} \left(\Pi' - \frac{\Pi}{x} \right)^2 + \frac{\beta}{8x^2} (\Pi^2 - x^2)^2 \right], \\
 H_D &= 4\pi M \int_0^{\infty} dx \left[2R'S - \frac{2RS}{x} \phi + \left(\frac{m}{M} - \frac{\Pi}{gx} \right) (R^2 - S^2) \right],
 \end{aligned} \tag{17}$$

渐近性质 (13)、(15) 及 (16) 保证式 (17) 在原点及远处的积分不发散, 从而使得解为孤子解.

(四) 束缚态条件

束缚态解的 E 必须满足条件

$$-m < E < m, \tag{18}$$

并且为了保证 R, S 在远处为零, η_+ 及 η_- 必须同时大于零或小于零, 这两点给出 ϕ 场的质量 m 和耦合常数之间一个关系. 由方程 (11)、(12) 及渐近性质导出

$$\int_0^{\infty} d(RS) = 0 = \int_0^{\infty} \left(\frac{m}{M} - \frac{G}{g} \frac{\Pi}{x} \right) (R^2 + S^2) dx - \int_0^{\infty} \frac{E}{M} (R^2 - S^2) dx,$$

亦即

$$\frac{E}{m} \int_0^{\infty} (R^2 - S^2) dx = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{GM}{gm} \frac{\Pi}{x} \right) (R^2 + S^2) dx, \tag{19}$$

如果象 Swank 等人那样不考虑 Higgs 场与旋量场的直接作用, 则条件 (19) 变成:

$$\frac{E}{m} = \int_0^{\infty} dx (R^2 + S^2) / \int_0^{\infty} dx (R^2 - S^2), \tag{20}$$

由于式 (20) 条件 (18) 必不能满足, 因而不存在束缚态, 这就是 Swank 等人的结论^[3]. 但是有了 Higgs 场与旋量场的直接耦合, 情况就不同了.

(i) 如果

$$\int_0^{\infty} dx (R^2 - S^2) > 0, \tag{21}$$

这时定义:

$$\begin{aligned}
 n &\equiv \int_0^{\infty} dx (R^2 + S^2) / \int_0^{\infty} dx (R^2 - S^2), \\
 \alpha &\equiv \int_0^{\infty} dx \frac{\Pi}{x} (R^2 + S^2) / \int_0^{\infty} dx (R^2 - S^2),
 \end{aligned} \tag{22}$$

显然由定义有 $n \geq 1$, $\alpha > 0$, 且 η_{\pm} 可用 n, α 表达如下:

$$\begin{aligned}\eta_+ &= \frac{1}{M} \left[(n+1)m - \frac{GM}{g}(\alpha+1) \right], \\ \eta_- &= \frac{1}{M} \left[(1-n)m + \frac{GM}{g}(\alpha-1) \right].\end{aligned}\quad (23)$$

由 (18) 及 (19), 应用 (22), 推得

$$\frac{GM\alpha}{(n+1)g} < m < \frac{GM\alpha}{(n-1)g}.\quad (24)$$

以下按 α 的值分别进行讨论.

(a) $\alpha < 1$

这时易证 η_- 为负, 故 η_+ 也为负的条件为

$$m < \frac{GM}{g} \frac{\alpha+1}{n+1},\quad (25)$$

因此得到

$$\frac{GM\alpha}{(n+1)g} < m < \min \left\{ \frac{GM\alpha}{(n-1)g}, \frac{(\alpha+1)GM}{(n+1)g} \right\}.\quad (26)$$

(b) $n > \alpha > 1$

要 η_+ 及 η_- 同时为负的条件为

$$\frac{GM}{g} \frac{\alpha-1}{n-1} < m < \frac{GM}{g} \frac{\alpha+1}{n+1}.\quad (27)$$

把 (27) 与 (24) 结合起来考虑, 得到 m 与 G 间的一个条件

$$\max \left(\frac{GM}{g} \frac{\alpha}{n+1}, \frac{GM}{g} \frac{\alpha-1}{n-1} \right) < m < \min \left(\frac{GM}{g} \frac{\alpha+1}{n+1}, \frac{GM}{g} \frac{\alpha}{n-1} \right).\quad (28)$$

(c) $\alpha > n$

要求 η_+ 及 η_- 同时为正是

$$\frac{\alpha+1}{n+1} \frac{GM}{g} < m < \frac{\alpha-1}{n-1} \frac{GM}{g},\quad (29)$$

与式 (24) 相比, 只要 (29) 满足, (24) 也一定满足.

易证式 (26)、(27)、(29) 的最左方一项都较最右方一项为小, 所以这三个不等式是有意义的.

(ii) 如果

$$\int_0^{\infty} dx(R^2 - S^2) < 0,\quad (30)$$

重新定义 n, α 如下:

$$\begin{aligned}n &\equiv \int_0^{\infty} dx(R^2 + S^2) / \int_0^{\infty} dx(S^2 - R^2), \\ \alpha &\equiv \int_0^{\infty} \frac{\Pi}{x} (R^2 + S^2) dx / \int_0^{\infty} dx(S^2 - R^2),\end{aligned}\quad (31)$$

这时 η_+ 及 η_- 用式 (31) 定义的 n 及 α 表示为

$$\begin{aligned}\eta_+ &= \frac{1}{M} \left[(1-n)m + \frac{GM}{g} (\alpha-1) \right], \\ \eta_- &= \frac{1}{M} \left[(1+n)m - \frac{GM}{g} (\alpha+1) \right],\end{aligned}\quad (32)$$

与情况 (i) 相比, 这时只不过 η_+ 及 η_- 的位置互换了一下, 所以讨论的结果不变.

(五) 一个全面解的例子

求方程组 (9)–(12) 的一个包括全部 x 变域的解是困难的. 为了看清方程组的解在全部 x 变域中的性质并与 Bardeen 等人的球壳解作比较, 在这里讨论一种特殊情况:

$$\begin{aligned}\lambda, \mu^2 &\rightarrow 0, & \text{但 } \mu^2/\lambda &\text{一定,} \\ g, G &\rightarrow 0, & \text{但 } G/g &\text{一定,} \\ \beta &\rightarrow 0\end{aligned}\quad (33)$$

下的解. 在这种情况下, 方程 (9)、(10) 中含 R 及 S 的项可略去, 于是与 (11)、(12) 退耦成为

$$\begin{cases} x^2 \phi'' - \phi^3 + \phi - \Pi^2 \phi = 0, \\ x^2 \Pi'' - 2\Pi \phi^2 = 0. \end{cases}\quad (34)$$

方程 (34) 的解已由 Prasad^[8] 给出为

$$\phi = \frac{x}{\sinh x},\quad (35)$$

$$\Pi = x \coth x - 1.$$

把式 (35) 代入方程 (11) 及 (12), 令

$$A \equiv m/M, \quad B \equiv E/M, \quad G_1 \equiv G/g,\quad (36)$$

使得 R, S 满足的方程为

$$\begin{cases} R' - \frac{R}{\sinh x} = \left[A + B - G_1 \left(\coth x - \frac{1}{x} \right) \right] S, \\ S' + \frac{S}{\sinh x} = \left[A - B - G_1 \left(\coth x - \frac{1}{x} \right) \right] R. \end{cases}\quad (37)$$

我们用数值解法解了方程 (37). 在一定的 A, G_1 的情况下, 只有当 B 取确定值时 (对应于束缚态能级) 才有符合物理要求 (边界条件) 的解. 我们在 DJ8-8 计算机上求得的参数的近似值为

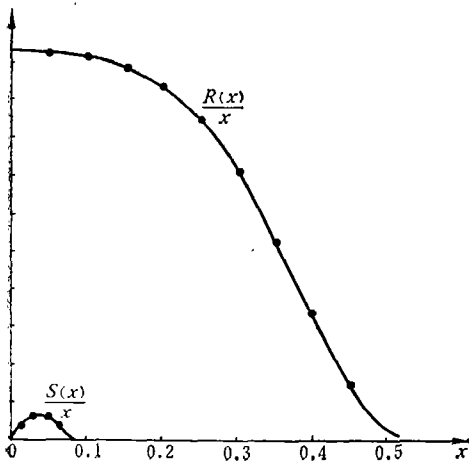


图1 函数 $\frac{R(x)}{x}$ 及 $\frac{S(x)}{x}$ 随 x 的变化

$$A \doteq 10$$

$$B \doteq 9$$

$$G_1 \doteq 50$$

相应的函数 $R(x)/x$ 及 $S(x)/x$ 的形状见图 1. 在图中纵轴取任意单位, 因为未进行归一化.

由图 1 可以看到 $\phi^+\phi$ 及 $\bar{\phi}\phi$ 的分布 (分别等于 $\frac{R^2+S^2}{x^2}$ 及 $\frac{R^2-S^2}{x^2}$) 是球状的分布, 而不是象 Bardeen 等人得到的球壳状分布.

综上所述, 我们看到在式 (1) 给出的拉氏函数中, 可以得到旋量磁单极的经典解. 这个解的特点是: 在中心处是旋量场的一个球状分布, 而在远处规范场及 Higgs 场的分布与 't Hooft 的磁单极解一样.

参 考 资 料

- [1] W. Bardeen, Chanowitz, S. Drell, M. Weinstein, T-M. Yan, *Phys. Rev.*, **D11** (1975), 1107.
- [2] G. 't Hooft, *Nucl. Phys.*, **B79** (1974), 276.
- [3] J. Swank, L. Swank, T. Dereli, *Phys. Rev.*, **D12** (1975), 1096.
- [4] G. Goldhaber, *Phys. Rev. Lett.*, **36** (1976), 1122.
- [5] P. Hasenfranz, G. 't Hooft, *Phys. Rev. Lett.*, **36** (1976), 1119.
- [6] 沈鼎昌、侯伯宇, 科学通报, **22** (1977), 204.
- [7] R. Jackiw, C. Rebbi, *Phys. Rev.*, **D13** (1976), 3398.
- [8] M. Prasad, C. Sommerfield, *Phys. Rev. Lett.*, **35** (1975), 760.

SPINOR MONOPOLE SOLUTION IS POSSIBLE

Wang Ming-chung Cheng Hsi-teh

(The Physics Group, Chengtu Institute of Technology)

Wang Ke-lin Chang Cheng-kang

(The Physics Group, Chengtu Institute of Geology)

Hsien Ting-chang

(Institute of High Energy Physics, Academia Sinica)

ABSTRACT

By introducing a direct scalar coupling between the spinor field and the Higgs field, we are able to show that in the non-abelian case, a spinor monopole bound state solution exists. The distribution of the spinor field in the solution concentrates near the origin, which is unlike the shell distribution of the SLAC solution.