第1卷 第1期 高能物理与核物理 Vol. 1, No. 1
1977 年 11 月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS November, 1977

层子的"色空间"对称性

北京大学物理系
基本粒子理论组

摘　　要

本文讨论了层子在色空间的对称性．这一对称性包含有两类对称变换：其一是色规范变换，保持颜色数守恒；其二是色置换，表明不同颜色层子之间的等价性．研究了相应的群(S_3^a)结构，给出了不可约表示和不可约表示的直乘分解，讨论了 S_3^a 群和 $U(3)$ 群的关系．

作为最简单的物理应用，我们重新得到了不久前提出的物理模型[1]．其中只需要两个中性矢量胶子，给出同 Han-Nambu 模型相似的超强相互作用饱和性，但最低的超强能级不限于色单态．如果假定矢量胶子有八个，分属于表示 **2** 和 **6**，它们的性质是完全简并的，那么就可得到 Han-Nambu 模型的结果．

一、引　　言

前不久提出了一个三套层子的理论[1]．在这个理论里，层子除了通常的 $SU(3)$ 自由度，还具有由三种不同的套所表征的新自由度．各套层子之间(至少对于束缚层子的超强相互作用的主要部分)是完全对称的；由三个层子组成的普通重子在新自由度中处于反对称态，从而保证了层子作为狄拉克粒子的自旋统计性质；束缚层子的超强相互作用具有饱和性，即不在通常的重子和介子之间显现出来．为了方便起见，把三种套说成三种不同的颜色，新自由度对应于一个新的"色空间"．普通的重子和介子分别对应于"色空间"确定的组态．新发现的 J-ψ 族粒子和其它一些新现象可能对应于新的色组态，代表新自由度的解放．

这个理论是早年一个强子结构模型[2]的一种推广．当时就曾引入三套层子和表征它们之间超强相互作用的新"荷" z，用以说明波函数的对称性和超强相互作用的饱和性．但三种层子处于不对称地位，因为层子之间存在超强相互作用要求它们的 z 荷不等于零，而饱和性则要求三种层子组成的重子具有零 z 荷：

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0$$

于是这三种 z 荷的绝对值不可能一般大，绝对值大的那个同绝对值小的两个反号．

最简单的推广是引入两种独立的新"荷"．每一种颜色的层子都具有两种荷，相应于

本文 1977 年 4 月 5 日收到．

一个平面矢量[3]. 如果相应于三种颜色的平面矢量的端点恰好构成一正三角形,三种颜色就处于互相对称的地位,这实际上就是文 [1] 所提的方案.

本文讨论层子之间颜色对称的假定所导致的一般结果,研究了层子的“色空间”对称群的性质. 给出了群的不可约表示,表示的直乘分解,以及这些表示同 $U(3)$ 表示的关系,为进一步研究层子在“色空间”的对称性提供一个工具. 结果表明,文 [1] 中的理论方案是能够保证超强相互作用饱和性的最简颜色对称方案,而南部的 $SU'(3)$ 理论[4]则是一般颜色对称理论中特殊的、对称性最高的一种方案.

二、三两节分别讨论“色空间”群和它的表示,一些大家知道的结果也列在其中,以备查考. 第四节简单讨论有关的物理应用,一些较具体的物理模型将另作讨论.

二、“色空间”群 S_3^a

这一节讨论“色空间”对称群的基本性质.

我们考虑的对象是三种不同颜色的层子,在“色矢量空间”中,由列矢量来代表

$$q^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad q^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad q^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

当 $q^{(i)}(i = 1, 2, 3)$ 处于对称地位时,它们可以经受的对称变换有两类. 一是交换颜色的变换,一是每种颜色的相变换,即规范变换. 我们先分别讨论这两类变换,然后考察两类变换的综合效果.

1. 色置换对称性

层子体系在交换颜色时保持不变,这些变换颜色的算符是

$$\begin{aligned} &C_0 = E \qquad &C_+ = (1, 2, 3) \qquad &C_- = (3, 2, 1) \\ &C_1 = (2, 3) \qquad &C_2 = (3, 1) \qquad &C_3 = (1, 2) \end{aligned} \tag{2}$$

这些算符作用在层子 $q^{(i)}$ 上,用下述矩阵来表示

$$\begin{aligned} &E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2'}$$

这些变换构成色置换群 S_3,群的乘法表是

E	C_+	C_-	C_1	C_2	C_3
C_-	E	C_+	C_2	C_3	C_1
C_+	C_-	E	C_3	C_1	C_2
C_1	C_2	C_3	E	C_+	C_-
C_2	C_3	C_1	C_-	E	C_+
C_3	C_1	C_2	C_+	C_-	E

按照不同的循环结构，群元素 C 可分成三类，这就是

$$\begin{array}{llll} (1^3): & C_0 = E & & \\ (1,2): & C_1 & C_2 & C_3 \\ (3): & C_+ & C_- & \end{array}$$

同整数 3 的三种不同划分相应，S_3 群有三个不等价的不可约表示

[3]：一维平凡表示，对任意群元素 C，表示矩阵都是

$$\mathscr{D}(C) = 1 \tag{3}$$

[2, 1]：二维表示，表示矩阵是

$$\mathscr{D}(E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathscr{D}(C_+) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \mathscr{D}(C_-) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\mathscr{D}(C_1) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \mathscr{D}(C_2) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \mathscr{D}(C_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

$[1^3]$：一维交替表示，表示矩阵是

$$\begin{aligned} &\mathscr{D}(E) = \mathscr{D}(C_\pm) = 1 \\ &\mathscr{D}(C_i) = -1 \qquad (i = 1, 2, 3) \end{aligned} \tag{5}$$

其它的表示都是可约表示，例如矩阵 (2)′ 是 S_3 群的一个三维可约表示.

在 6×6 的乘法表中，把某一个元素所在位置换成数字 1，其它元素所在位置换成数字 0，这样得到的矩阵是该元素的一个六维表示矩阵，例如

$$\mathscr{D}(E) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \mathscr{D}(C_+) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

等等. 这种表示矩阵的特点是每一行(每一列)只有一个矩阵元为 1，其余都为 0. 这是 S_3 群的正规表示，它也是可约的.

表示矩阵的阵迹称为表示的特征标. 特征标是类的函数，不可约表示的特征标用 χ 代表，可约表示的特征标用 ψ 代表，上面几个表示的特征标可以列成右表.

特征标 \ 类别	(1^3)	$(1,2)$	(3)
$\chi[3]$	1	1	1
$\chi[2,1]$	2	0	-1
$\chi[1^3]$	1	-1	1
ψ_3	3	1	0
ψ_6	6	0	0

从右表上可以看出

$$\begin{aligned} \psi_3 &= \chi[3] + \chi[2,1] \\ \psi_6 &= \chi[3] + 2\chi[2,1] + \chi[1^3] \end{aligned} \tag{7}$$

这表明前述三维表示可约化成一个一维表示 [3] 和一个二维表示 [2, 1]，而正规表示可约化成一个一维平凡表示 [3]，一个一维交替表示$[1^3]$和两个二维表示[2.1].

如果第三种颜色的层子同前两种层子不一样,对称性只存在于前两种颜色层子 $q^{(1)}$ 和 $q^{(2)}$ 之间,对称算符是

$$E \quad 和 \quad C_3$$

它们构成置换群 S_2, 是 S_3 的一个子群. 同前面的情况相似, 这个群有两个共轭类 (1^2) 和 (2), 有两个不等价的不可约表示, $[2]$ 和 $[1^2]$, 它们都是一维的. 表示的特征标是

	(1^2)	(2)
$\chi[2]$	1	1
$\chi[1^2]$	1	-1

如果三种颜色的层子各不相同, 对称算符只是恒等算符 E, 这个 S_1 子群只有一个一维不可约表示[1].

2. 色规范对称性

层子 $q^{(i)}$ 还可以经受规范变换,设规范参数为 α_i, $i=1, 2, 3$, 记 $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$,则作用在 $q^{(i)}$ 上的规范变换算符可写作

$$U(\boldsymbol{\alpha})=\begin{pmatrix} e^{i\alpha_1} & & \\ & e^{i\alpha_2} & \\ & & e^{i\alpha_3} \end{pmatrix} \tag{8}$$

规范变换是可对易的变换,

$$U(\boldsymbol{\alpha})U(\boldsymbol{\alpha}')=U(\boldsymbol{\alpha}')U(\boldsymbol{\alpha})=U(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\alpha}') \tag{9}$$

这些规范变换构成色规范群. 群的单位元素是

$$U(\mathbf{0})=I \tag{10}$$

逆元素是

$$U(\boldsymbol{\alpha})^{-1}=U(-\boldsymbol{\alpha}) \tag{11}$$

规范群是一个阿贝尔群,每一个群元素自成一个共轭类,不可约表示都是一维的. 每一个不可约表示用一个矢量 $\mathbf{k}=(k_1, k_2, k_3)$ 来标记,表示矩阵是 $D_{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\alpha})=e^{i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\alpha}}$.

规范参数以 2π 为周期, α_i 和 $\alpha_i'=\alpha_i+m_i 2\pi$ (m_i 为整数) 代表相同的规范变换. 表示矩阵 $e^{i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\alpha}}$ 和 $e^{i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\alpha}'}$ 也应相同,这要求

$$k_i=n_i \quad n_i\ 为整数$$

因此对一个确定的表示, $\mathbf{k}$ 矢量的分量 k_i 就代表第 i 种色层子的数目, $\mathbf{k}$ 矢量可称为"色数矢量".

可以从另一个观点来考察规范变换(8), 把它看成作用在 $q^{(i)}$ 上的一个公共的相变换和两个相对的相变换. 这时比较方便的是引入雅可比参数 β_0, β_1 和 β_2

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \beta_0+\frac{1}{2}\beta_1+\frac{1}{3}\beta_2 \\ \alpha_2 &= \beta_0-\frac{1}{2}\beta_1+\frac{1}{3}\beta_2 \\ \alpha_3 &= \beta_0 \qquad\qquad -\frac{2}{3}\beta_2 \end{aligned} \tag{12}$$

或者

$$\beta_0=\frac{1}{3}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)$$

$$\beta_1=\alpha_1-\alpha_2 \qquad (12')$$
$$\beta_2=\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3)$$

于是变换 (8) 可以写成

$$\begin{aligned}U(\boldsymbol{\alpha})&=\begin{pmatrix}e^{i\left(\beta_0+\frac{1}{2}\beta_1+\frac{1}{3}\beta_2\right)} & & \\ & e^{i\left(\beta_0-\frac{1}{2}\beta_1+\frac{1}{3}\beta_2\right)} & \\ & & e^{i\left(\beta_0-\frac{2}{3}\beta_2\right)}\end{pmatrix}\\ &=e^{i\beta_0}e^{i\left(\frac{\beta_1}{2}\lambda_3+\frac{\beta_2}{\sqrt{3}}\lambda_8\right)}\\ &=e^{i\beta_0}e^{i(\beta_0 I_0+\beta_2 Y)}\\ &=e^{i\beta_0}e^{i(\varphi_1 H_1+\varphi_2 H_2)}\end{aligned} \qquad (13)$$

其中 λ_3, λ_8 或 I_0, Y 或 H_1, H_2 是 $SU(3)$ 群中常使用的两个可以同时对角化的无穷小算子[5]

$$\begin{aligned}I_0&=\frac{1}{2}\lambda_3=\sqrt{3}\,H_1\\ Y&=\frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_8=2H_2\end{aligned} \qquad (14)$$

而参数

$$\varphi_1=\sqrt{3}\,\beta_1 \qquad \varphi_2=2\beta_2 \qquad (15)$$

按 (13) 式，任意一个规范变换 $U(\boldsymbol{\alpha})$ 除可以用规范参数 $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 标志之外，还可以等价地用参数 $\beta=(\beta_0,\beta_1,\beta_2)=(\beta_0,\vec{\beta})$ 或 $(\beta_0;\varphi_1,\varphi_2)=(\beta_0;\vec{\varphi})$ 来标志. 下面讨论群表示时，特别是讨论与 $U(3)$ 群表示的关系时，往往用参数组 β.

对于 $U(\boldsymbol{\alpha})$ 的某个不可约表示

$$\begin{aligned}D_{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\alpha})&=e^{i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\alpha}}=e^{i(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3)}\\ &=e^{i(N_0\beta_0+N_1\beta_1+N_2\beta_2)}\\ &=e^{iN_0\beta_0}e^{i(m_1\varphi_1+m_2\varphi_2)}\end{aligned} \qquad (16)$$

其中

$$N_0=k_1+k_2+k_3$$
$$N_1=\frac{1}{2}(k_1-k_2)$$
$$N_2=\frac{1}{3}(k_1+k_2-2k_3)$$

与 (13) 式相比可知：N_0 为色层子总数，N_1 是 I_0 的本征值，可称为“色同位旋投影量子数”[借用 $SU(3)$ 的语言，下同]，N_2 是 Y 的本征值，可称为“色超荷量子数”. 而

$$m_1=\frac{1}{\sqrt{3}}N_1 \qquad m_2=\frac{1}{2}N_2 \qquad (17)$$

是 H_1 和 H_2 的本征值. 这样，表示 $D_{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\alpha})$ 既可用“色数矢量” $\mathbf{k}=(k_1,k_2,k_3)$ 来标志，也可以等价地用量子数 N_0 和平面“权矢量” $\vec{m}$ 来标志.

3. “色空间”群

层子体系若既具有色置换对称性，又具有色规范对称性，则必具有两者联合的对称性. 但这两类对称算符一般是不对易的. 作用在 $q^{(i)}$ 上的置换算符由矩阵 $2'$ 代表，规范

算符由矩阵 (8) 代表,通过直接计算不难证明

$$CU(\boldsymbol{\alpha})C^{-1}=U(C\boldsymbol{\alpha}) \tag{18}$$

其中 $C\boldsymbol{\alpha}$ 是把置换算符作用于"坐标"矢量 $\boldsymbol{\alpha}$ 所得的新"坐标"矢量 $\boldsymbol{\alpha}'$,例如

$$C_3\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_2\\\alpha_1\\\alpha_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{\alpha}' \tag{19}$$

(18) 式可改写作

$$CU(\boldsymbol{\alpha})=U(C\boldsymbol{\alpha})C \tag{18'}$$

定义"色空间"的一般置换—规范变换为

$$(C\,|\,\boldsymbol{\alpha})=U(\boldsymbol{\alpha})C \tag{20}$$

那末,利用关系式 (18′) 很容易得到这种变换的乘法规则

$$\begin{aligned}(C'\,|\,\boldsymbol{\alpha}')(C\,|\,\boldsymbol{\alpha})&=U(\boldsymbol{\alpha}')C'U(\boldsymbol{\alpha})C\\&=U(\boldsymbol{\alpha}')U(C'\boldsymbol{\alpha})C'C\\&=U(\boldsymbol{\alpha}'+C'\boldsymbol{\alpha})C'C\\&=(C'C\,|\,C'\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\alpha}')\end{aligned} \tag{21}$$

于是变换 (20) 的总体构成一群. 群的单位元素是变换

$$(E\,|\,\mathbf{0})=U(\mathbf{0})E=E \tag{22}$$

而逆元素是

$$(C\,|\,\boldsymbol{\alpha})^{-1}=(C^{-1}|-C^{-1}\boldsymbol{\alpha}) \tag{23}$$

满足乘法规则 (21) 的群我们并不陌生,非齐次转动群(转动—平移群)就是一例. 我们这里的情况同晶体的空间群特别相象,色置换群 S_3 相当于晶格点群,色规范群 $U(\boldsymbol{\alpha})$ 相当于晶格平移群,于是我们把"色空间"的置换—规范群称为"色空间群",记作 S_3^α.

用 β 来标志规范参数, 容易看到, 同置换算符 C 不相对易的仅仅是与参数 $\vec{\beta}=(\beta_1,\beta_2)$ 相对应的规范变换 $U(\vec{\beta})$. $U(\beta_0)=e^{i\beta_0}$ 是 S_3^α 的不变子群.

三、"色空间"群 S_3^α 的表示

1. 不可约表示

平行于非齐次转动群或晶格空间群, 我们可以找出 "色空间" 群 S_3^α 的所有不可约表示. 可以证明:

(1) 如果 S_3^α 的一个表示空间中包含有规范子群 $U(\boldsymbol{\alpha})$ 的属于"色数矢量" $\mathbf{k}$ 的一个子空间, 则必定还包含有 $U(\boldsymbol{\alpha})$ 属于矢量 $C\mathbf{k}$ 的那个子空间. C 是置换子群 S_3 的任一元素.

按照假定, 设 $\psi(\mathbf{k},\zeta)$ 是属于 $\mathbf{k}$ 的子空间的基矢, ζ 用以标记除 $\mathbf{k}$ 以外的其它量子数

$$U(\boldsymbol{\alpha})\psi(\mathbf{k},\zeta)=e^{i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\alpha}}\psi(\mathbf{k},\zeta) \tag{24}$$

$C\psi(\mathbf{k},\zeta)$ 和 $\psi(\mathbf{k},\zeta)$ 同在 S_3^α 的一个表示空间中,按 (18′) 式

$$\begin{aligned}U(\boldsymbol{\alpha})C\psi(\mathbf{k},\zeta)&=CU(C^{-1}\boldsymbol{\alpha})\psi(\mathbf{k},\zeta)\\&=Ce^{i\mathbf{k}\cdot C^{-1}\alpha}\psi(\mathbf{k},\zeta)\\&=e^{iC\mathbf{k}\cdot\alpha}C\psi(\mathbf{k},\zeta)\end{aligned} \tag{25}$$

其中用到了分量的置换不改变矢量标积的性质，即 $C\mathbf{a}\cdot C\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$. (25) 式说明 $C\psi(\mathbf{k}, \zeta)$ 是 $U(\boldsymbol{\alpha})$ 子群的属于本征矢量 $C\mathbf{k}$ 的子空间.

置换算符 C 作用于矢量 $\mathbf{k}$，或者得到 $\mathbf{k}$ 本身，或者得到另外的矢量，称为与 $\mathbf{k}$ 等价的矢量.

使矢量 $\mathbf{k}$ 保持不变的那些置换算符构成一个子群，称为“小群”，或者“色矢 $\mathbf{k}$ 群”.

矢量 $\mathbf{k}$ 和所有与 $\mathbf{k}$ 等价的矢量的集合称为 $\mathbf{k}$ 的“星集” $\mathbf{k}^*$.

(2) S_3^a 的不可约表示由选定的小群的不可约表示完全决定.

(3) 因此，要完全标志 S_3^a 的一个不可约表示，须要知道：1) $\mathbf{k}$ 矢量的“星集”，2) 小群的不可约表示 d. 由于“星集”中任意一个矢量就决定了整个“星集”，我们通常选取其中分量满足关系 $k_1\geqslant k_2\geqslant k_3$ 的矢量 $\mathbf{k}$ 来标记该“星集”. 这样，S_3^a 的不可约表示用 $D_{\mathbf{k}}^d=D_{k_1,k_2,k_3}^d$ 来表示.

若 D 和 d 又分别代表表示的维数，则

$$D=qd \tag{26}$$

其中 q 是该“星集”中不同“色矢量”的个数，并且

$$q=g/h \tag{26'}$$

g 是整个置换子群的阶(现在的情况 $g=6$)，h 是小群的阶.

按照 $\mathbf{k}$ “星集”的不同性质，“色空间”群的不可约表示可以分成三大类别. 下面我们分别给以讨论.

1) $\mathbf{k}=(a, a, a)$，$\mathbf{k}$ 的三个分量都相等的情况. 此时，$\mathbf{k}$ 的“星集”只包含 $\mathbf{k}$ 本身一个矢量；小群就是色置换群 S_3，它的不可约表示已在前面给出，共有三个不可约表示，$d=[3]$, $[2, 1]$ 和 $[1^3]$. 无论 d 取那一个，令 $\psi(\mathbf{k}, \zeta)$ 为表示空间的基矢，(在 $d=[2, 1]$ 时，ζ 取两个值，另两种情况 ζ 只取一个值)，则有

$$U(\boldsymbol{\alpha})\psi(\mathbf{k}, \zeta)=e^{i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\alpha}}\psi(\mathbf{k}, \zeta) \tag{24}$$

和

$$C\psi(\mathbf{k}, \zeta)=\sum_{\eta}\psi(\mathbf{k}, \eta)\mathscr{D}(C)_{\eta\zeta} \tag{27}$$

对于 $d=[3]$, $[2, 1]$, $[1^3]$ 三种情形，矩阵 $\mathscr{D}(C)$ 已在式 (3), (4), (5)中分别给出. 于是，按 (20) 式的定义

$$\begin{aligned}(C|\boldsymbol{\alpha})\psi(\mathbf{k}, \zeta)&=\sum_{\eta}\psi(\mathbf{k}, \eta)e^{i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\alpha}}\mathscr{D}(C)_{\eta\zeta}\\&=\sum_{\eta}\psi(\mathbf{k}, \eta)e^{i3a\beta_0}\mathscr{D}(C)_{\eta\zeta}\end{aligned} \tag{28}$$

这样，我们得到“色空间”群的三种不可约表示，即

$$D_{a,a,a}^{[3]}\qquad D_{a,a,a}^{[2,1]}\qquad D_{a,a,a}^{[1^3]} \tag{29}$$

它们的维数分别是

$$1,\qquad 2,\qquad 1$$

正好等于小群不可约表示的维数.

2) $\mathbf{k}=\mathbf{k}^{(1)}=(b, a, a)$，有两个分量相等. 此时同 $\mathbf{k}^{(1)}$ 属于同一“星集”的“色数矢量”是

$$\mathbf{k}^{(2)}=(a, b, a)\quad 和\quad \mathbf{k}^{(3)}=(a, a, b)$$

由于

$$E\mathbf{k}^{(1)}=C_1\mathbf{k}^{(1)}=\mathbf{k}^{(1)}$$
$$C_3\mathbf{k}^{(1)}=C_+\mathbf{k}^{(1)}=\mathbf{k}^{(2)}$$
$$C_2\mathbf{k}^{(1)}=C_-\mathbf{k}^{(1)}=\mathbf{k}^{(3)}$$

所以使 $\mathbf{k}^{(1)}$ 保持不变的小群是 S_2: (E, C_1). 对应于小群 S_2 的两个不可约表示 $d=[2]$, $[1^2]$, 我们得到 S_3^a 的两种不可约表示

$$D^{[2]}_{b,a,a} \quad 和 \quad D^{[1^2]}_{b,a,a} \tag{30}$$

由于小群的表示 $[2]$ 和 $[1^2]$ 都是一维的，而"星集"中有三个矢量，故这两个表示都是三维的.

我们现在来找出这两个表示的具体形式. 小群——色矢 $\mathbf{k}^{(1)}$ 群——S_2 的两个不可约表示都是一维的，表示的基矢都只含一个分量，我们记作

$$\psi^{(1)}\equiv\psi(\mathbf{k}^{(1)};\eta)$$

对表示 $[2]$, $\eta=+$; 对表示 $[1^2]$, $\eta=-$. 显然

$$\begin{aligned}E\psi(\mathbf{k}^{(1)};\eta)&=\psi(\mathbf{k}^{(1)};\eta)\\ C_1\psi(\mathbf{k}^{(1)};\eta)&=\eta\psi(\mathbf{k}^{(1)};\eta)\end{aligned} \tag{31}$$

定义

$$\begin{aligned}\psi^{(2)}\equiv\psi(\mathbf{k}^{(2)};\eta)&=C_+\psi(\mathbf{k}^{(1)};\eta)\\ \psi^{(3)}\equiv\psi(\mathbf{k}^{(3)};\eta)&=C_-\psi(\mathbf{k}^{(1)};\eta)\end{aligned} \tag{32}$$

则

$$(\psi^{(1)},\psi^{(2)},\psi^{(3)})$$

就是我们要找的 S_3^a 不可约表示的基矢.

首先，根据 (24)，容易得到 $U(\boldsymbol{a})$ 的表示矩阵

$$\mathscr{D}(\boldsymbol{a})=\begin{pmatrix}e^{i\mathbf{k}^{(1)}\cdot a} & & \\ & e^{i\mathbf{k}^{(2)}\cdot a} & \\ & & e^{i\mathbf{k}^{(3)}\cdot a}\end{pmatrix} \tag{33}$$

其次，根据 (31) 和 (32)，可以得到 C 的表示矩阵. 因为

$$\begin{aligned}E\psi^{(1)}&=\psi^{(1)} & C_1\psi^{(1)}&=\eta\psi^{(1)}\\ C_+\psi^{(1)}&=\psi^{(2)} & C_2\psi^{(1)}&=C_-C_1\psi^{(1)}=\eta\psi^{(3)}\\ C_-\psi^{(1)}&=\psi^{(3)} & C_3\psi^{(1)}&=C_+C_1\psi^{(1)}=\eta\psi^{(2)}\end{aligned} \tag{34}$$

并且

$$\begin{aligned}E\psi^{(2)}&=\psi^{(2)}\\ C_+\psi^{(2)}&=C_+C_+\psi^{(1)}=C^-\psi^{(1)}=\psi^{(3)}\\ C_-\psi^{(2)}&=C_-C_+\psi^{(1)}=E\psi^{(1)}=\psi^{(1)}\\ C_1\psi^{(2)}&=C_1C_+\psi^{(1)}=C_2\psi^{(1)}=\eta\psi^{(3)}\\ C_2\psi^{(2)}&=C_2C_+\psi^{(1)}=C_3\psi^{(1)}=\eta\psi^{(2)}\\ C_3\psi^{(2)}&=C_3C_+\psi^{(1)}=C_1\psi^{(1)}=\eta\psi^{(1)}\end{aligned} \tag{34'}$$

以及，相似地有

$$
\begin{aligned}
&E\psi^{(3)} = \psi^{(3)} \\
&C_+\psi^{(3)} = C_+C_-\psi^{(1)} = E\psi^{(1)} = \psi^{(1)} \\
&C_-\psi^{(3)} = C_-C_-\psi^{(1)} = C_+\psi^{(1)} = \psi^{(2)} \\
&C_1\psi^{(3)} = C_3\psi^{(1)} = \eta\psi^{(2)} \\
&C_2\psi^{(3)} = C_1\psi^{(1)} = \eta\psi^{(1)} \\
&C_3\psi^{(3)} = C_2\psi^{(1)} = \eta\psi^{(3)}
\end{aligned}
\tag{34''}
$$

由此我们即可直接写出算符 C 的矩阵表示．对于小群表示 $[2]$，$\eta = +1$，我们得到的表示矩阵 $\mathscr{D}(C)$ 就是 (2′) 式．

对于小群表示 $[1^2]$，$\eta = -1$，C 的表示矩阵是

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{D}(E) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathscr{D}(C_+) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\mathscr{D}(C_-) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathscr{D}(C_1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\mathscr{D}(C_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathscr{D}(C_3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{35}
$$

这是同 (2′) 式不等价的另一个三维表示．

最后，根据(20)式，我们可以得到 S_3^a 中一般的变换算符 $(C|\boldsymbol{a})$ 的矩阵表示．例如

$$
\mathscr{D}(C_3|\boldsymbol{a}) = \mathscr{D}(\boldsymbol{a})\mathscr{D}(C_3) = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\mathbf{k}^{(1)}\cdot\boldsymbol{a}} & 0 \\ e^{i\mathbf{k}^{(2)}\cdot\boldsymbol{a}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\mathbf{k}^{(3)}\cdot\boldsymbol{a}} \end{pmatrix}
\tag{36}
$$

等等．注意，表示矩阵 (2′) 和 (35) 对于 S_3 群来说是可约的，但 (36) 式所代表的矩阵对于 S_3^a 群则是不可约的．

3) $\mathbf{k} = \mathbf{k}^{(1)} = (a, b, c)$．三个分量各不相等的情形．此时 S_3 中使“色数矢量” $\mathbf{k}^{(1)}$ 保持不变的仅仅只有恒等变换 E，小群就是 $S_1 = E$．而

$$
\begin{aligned}
&E\mathbf{k}^{(1)} = \mathbf{k}^{(1)} \\
&C_+\mathbf{k}^{(1)} = (c, a, b) = \mathbf{k}^{(2)} \\
&C_-\mathbf{k}^{(1)} = (b, c, a) = \mathbf{k}^{(3)} \\
&C_1\mathbf{k}^{(1)} = (a, c, b) = \mathbf{k}^{(1)'} \\
&C_2\mathbf{k}^{(1)} = (c, b, a) = \mathbf{k}^{(2)'} \\
&C_3\mathbf{k}^{(1)} = (b, a, c) = \mathbf{k}^{(3)'}
\end{aligned}
\tag{37}
$$

这六个矢量组成 $\mathbf{k}$ 的“星集”，$q = 6$．小群只有一个一维表示 $d = [1]$，所以我们得到 S_3^a 的六维不可约表示

$$
D_{a,b,c}^{[1]}
\tag{38}
$$

设 $\psi^{(1)} \equiv \psi(\mathbf{k}^{(1)})$ 是小群表示的基，按(37)，用相应的算符作用在 $\psi^{(1)}$ 可以得到其它

五个 $\mathbf{k}$ 矢量相应的基函数. 这六个函数 $\phi^{(i)}(i=1,2,3,1',2',3')$ 就构成 $D^{[1]}_{a,b,c}$ 的基.

规范变换 $U(\boldsymbol{\alpha})$ 作用在这些基函数上的结果已经由相应的 $\mathbf{k}$ 矢量所表征. 置换算符 C 作用在其上的结果可用 2) 中相似的方法确定, 结果得到 C 的一个六维表示, 等价于前面第二节中给出的正规表示 (6). 由此可得到 S^a_3 的一般元素 $(C|\boldsymbol{\alpha})$ 的矩阵表示.

综合以上 (29)、(30) 和 (38) 式, 我们得到"色空间"群 S^a_3 的不可约表示, 它们属于三大类别的六种类型, 这就是

$$D^{[3]}_{a,a,a},\quad D^{[2,1]}_{a,a,a},\quad D^{[1^3]}_{a,a,a};\quad D^{[2]}_{b,a,a},\quad D^{[1^2]}_{b,a,a};\quad D^{[1]}_{a,b,c}.$$

有时为了简单起见,只标出表示的维数,它们分别是

$$\mathbf{1},\quad \mathbf{2},\quad \mathbf{1'};\quad \mathbf{3},\quad \mathbf{3'};\quad \mathbf{6}.$$

由于不同的 $\mathbf{k}$"星集"有无穷多个, S^a_3 不等价的不可约表示的数目是无限的, 但总可以归为上述三大类别的六种类型.

2. 共轭元素类　表示的特征标

置换群 S_3 有三个类,这就是 (1^3), $(1,2)$ 和 (3).

规范群 $U(\boldsymbol{\alpha})$ 有无穷多个类, 每个元素自成一类, 故类的标记是 $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $0\leqslant\alpha_i<2\pi$, 或者 $\beta=(\beta_0,\beta_1,\beta_0)$, $0\leqslant\beta_0<2\pi$, $0\leqslant\beta_1<4\pi$, $0\leqslant\beta_2<6\pi$.

"色空间"群 S^a_3 的元素如何分类? 这些类如何标记?

元素 $(E|\boldsymbol{\alpha})$ 就是规范群的元素 $U(\boldsymbol{\alpha})$, 在规范群中原来每个元素自成一类, 现因 $CU(\boldsymbol{\alpha})C^{-1}=U(C\boldsymbol{\alpha})$, $U(C\boldsymbol{\alpha})$ 和 $U(\boldsymbol{\alpha})$ 是互相共轭的. 属于同一类. 所有不等价的元素 $U(\boldsymbol{\alpha})$ 可取分量满足关系 $\alpha_1\geqslant\alpha_2\geqslant\alpha_3$ 的所有 $\boldsymbol{\alpha}$ 值. 因此可以用 $(1^3;\beta_0,\beta_1,\beta_2)$, $0\leqslant\beta_0,\beta_1,\beta_2<2\pi$ 来标志 $(E|\boldsymbol{\alpha})$ 中的每一个类.

对于元素 $(C_i|\boldsymbol{\alpha})$, $i=1,2,3$,我们先用置换算符作相似变换,使之变成 $(C_3|\boldsymbol{\alpha}')$, 其中规范参数 $\boldsymbol{\alpha}'$ 一般与 $\boldsymbol{\alpha}$ 不同. 再用规范算符 $U(\boldsymbol{\alpha}'')$ 作相似变换

$$\begin{aligned}
&U(\boldsymbol{\alpha}'')(C_3|\boldsymbol{\alpha}')U(-\boldsymbol{\alpha}'')\\
&=U(\boldsymbol{\alpha}'')U(\boldsymbol{\alpha}')C_3U(-\boldsymbol{\alpha}'')\\
&=U(\boldsymbol{\alpha}'')U(\boldsymbol{\alpha}')U(-C_3\boldsymbol{\alpha}'')C_3\\
&=(C_3|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\alpha}''-C_3\boldsymbol{\alpha}'')
\end{aligned}$$

$\boldsymbol{\alpha}''-C_3\boldsymbol{\alpha}''$ 实际上只包含一个参数, $\alpha''_1-\alpha''_2$. 对于任意的 $\boldsymbol{\alpha}'$, 总可以选取一定的 $\boldsymbol{\alpha}''$ 使 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}=\boldsymbol{\alpha}'+\boldsymbol{\alpha}''-C_3\boldsymbol{\alpha}''$ 的前两个分量相等, $\hat{\alpha}_1=\hat{\alpha}_2$ 或 $\hat{\beta}_1=0$. 于是我们用 $(1,2;\hat{\beta}_0,0,\hat{\beta}_2)$ 来标记这类元素. $\hat{\beta}_0$ 和 $\hat{\beta}_2$ 是可变的参数, 因此标记类时我们可以取消 $\wedge$ 号, 记作 $(1,2;\beta_0,0,\beta_2)$, 只要注意 β_0,β_2 不是同 $(C_i|\boldsymbol{\alpha})$ 中 $\boldsymbol{\alpha}$ 相应而是同 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ 相应就是了.

对于元素 $(C_\pm|\hat{\boldsymbol{\alpha}})$, 先用相似的置换变成为 $(C_+|\boldsymbol{\alpha}')$, 再用 $U(\boldsymbol{\alpha}'')$ 作相似变换变成 $(C_+|\boldsymbol{\alpha}'+\boldsymbol{\alpha}''-C_+\boldsymbol{\alpha}'')$. $\boldsymbol{\alpha}''-C_+\boldsymbol{\alpha}''$ 包含两个独立参数,因此对于任意的 $\boldsymbol{\alpha}'$,总可以选取适当的 $\boldsymbol{\alpha}''$ 使 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}'=\boldsymbol{\alpha}'+\boldsymbol{\alpha}''-C_+\boldsymbol{\alpha}''$ 的三个分量相等, $\hat{\alpha}'_1=\hat{\alpha}'_2=\hat{\alpha}'_3$, 于是我们用 $(3;\beta_0,0,0)$ 来标记这类元素. 这里

$$\beta_0=\frac{1}{3}(\hat{\alpha}'_1+\hat{\alpha}'_2+\hat{\alpha}'_3)=\frac{1}{3}(\alpha'_1+\alpha'_2+\alpha'_3)=\frac{1}{3}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)$$

下表给出前一小节讨论的诸不可约表示的特征标. 上行列不同的类别 (K), 左列列不同的表示 $D^d_{\mathbf{k}}$, 中间就是特征标 $\chi^d_{\mathbf{k}}(K)$. 下边列出的是表示的总色层子数 N_0

$D \backslash \chi \backslash K$	$(1^3;\ \beta_0,\ \beta_1,\ \beta_2)$	$(1,\ 2;\ \beta_0,\ 0,\ \beta_2)$	$(3;\ \beta_0,\ 0,\ 0)$	N_0
$D^{[3]}_{a,a,a}$	$e^{iN_0\beta_0}$	$e^{iN_0\beta_0}$	$e^{iN_0\beta_0}$	
$D^{[2,1]}_{a,a,a}$	$2e^{iN_0\beta_0}$	0	$-e^{iN_0\beta_0}$	$3a$
$D^{[1^3]}_{a,a,a}$	$e^{iN_0\beta_0}$	$-e^{iN_0\beta_0}$	$e^{iN_0\beta_0}$	
$D^{[2]}_{a,a,b}$	$e^{iN_0\beta_0+i\frac{b-a}{3}\beta_2}\left\{e^{i(a-b)\beta_2}\right.$	$e^{iN_0\beta_0+i\frac{2}{3}(a-b)\beta_2}$	0	$2a+b$
$D^{[1^2]}_{a,a,b}$	$\left.+2\cos\frac{a-b}{2}\beta_1\right\}$	$-e^{iN_0\beta_0+i\frac{2}{3}(a-b)\beta_2}$	0	
$D^{[1]}_{a,b,c}$	$2e^{iN_0\beta_0}\left\{e^{i\frac{a+b-2c}{3}\beta_2}\cos\frac{a-b}{2}\beta_1 + e^{i\frac{b+c-2a}{3}\beta_2}\cos\frac{b-c}{2}\beta_1 + e^{i\frac{c+a-2b}{3}\beta_2}\cos\frac{c-a}{2}\beta_1\right\}$	0	0	$a+b+c$

3. 不可约表示乘积的约化

利用上面给出的表示特征标，很容易确定表示的乘积如何按不可约表示分解的问题．下面我们给出一些较简单的例子．

$$\chi^{[2]}_{1,0,0}\times\chi^{[2]}_{0,0,-1}=\chi^{[1]}_{1,0,-1}+\chi^{[2,1]}_{0,0,0}+\chi^{[3]}_{0,0,0} \tag{39}$$

$$\mathbf{3}\otimes\bar{\mathbf{3}}=\mathbf{6}\oplus\mathbf{2}\oplus\mathbf{1}$$

$$\chi^{[2]}_{1,0,0}\times\chi^{[1^2]}_{0,0,-1}=\chi^{[1]}_{1,0,-1}+\chi^{[2,1]}_{0,0,0}+\chi^{[1^3]}_{0,0,0} \tag{40}$$

$$\mathbf{3}\otimes\bar{\mathbf{3}}'=\mathbf{6}\oplus\mathbf{2}\oplus\mathbf{1}'$$

$$\chi^{[1^2]}_{1,0,0}\times\chi^{[1^2]}_{0,0,-1}=\chi^{[1]}_{1,0,-1}+\chi^{[2,1]}_{0,0,0}+\chi^{[3]}_{0,0,0} \tag{41}$$

$$\mathbf{3}'\otimes\bar{\mathbf{3}}'=\mathbf{6}\oplus\mathbf{2}\oplus\mathbf{1}$$

$$\chi^{[2]}_{1,0,0}\times\chi^{[2]}_{1,0,0}=\chi^{[2]}_{2,0,0}+\chi^{[2]}_{1,1,0}+\chi^{[1^2]}_{1,1,0} \tag{42}$$

$$\mathbf{3}\otimes\mathbf{3}=\mathbf{3}\oplus\mathbf{3}\oplus\mathbf{3}'$$

$$\chi^{[2]}_{1,0,0}\times\chi^{[2]}_{2,0,0}=\chi^{[2]}_{3,0,0}+\chi^{[1]}_{2,1,0} \tag{43}$$

$$\mathbf{3}\otimes\mathbf{3}=\mathbf{3}\oplus\mathbf{6}$$

$$\chi^{[2]}_{1,0,0}\times\chi^{[2]}_{1,1,0}=\chi^{[1]}_{2,1,0}+\chi^{[2,1]}_{1,1,1}+\chi^{[3]}_{1,1,1} \tag{44}$$

$$\mathbf{3}\otimes\mathbf{3}=\mathbf{6}\oplus\mathbf{2}\oplus\mathbf{1}$$

$$\chi^{[2]}_{1,0,0}\times\chi^{[1^2]}_{1,1,0}=\chi^{[1]}_{2,1,0}+\chi^{[2,1]}_{1,1,1}+\chi^{[1^3]}_{1,1,1} \tag{45}$$

$$\mathbf{3}\otimes\mathbf{3}'=\mathbf{6}\oplus\mathbf{2}\oplus\mathbf{1}'$$

因此，

$$(\chi^{[2]}_{1,0,0})^3=\chi^{[2]}_{3,0,0}+3\chi^{[1]}_{2,1,0}+2\chi^{[2,1]}_{1,1,1}+\chi^{[3]}_{1,1,1}+\chi^{[1^3]}_{1,1,1} \tag{46}$$

$$\mathbf{3}^3=\mathbf{3}\oplus 3\times\mathbf{6}\oplus 2\times\mathbf{2}\oplus\mathbf{1}\oplus\mathbf{1}'$$

每个式子的下面我们列出了用维数来表述的不可约表示乘积约化的结果． 维数相同而 **k**"星集"不同的表示是不等价的，如(42)式中 $D^{[2]}_{2,0,0}$ 和 $D^{[2]}_{1,1,0}$ 都是三维表示．对称性（小群的表示）相同而 **k**"星集"相反的表示记为复共轭表示，如(39)式中，$D^{[2]}_{1,0,0}=\mathbf{3}$，$D^{[2]}_{0,0,-1}=\bar{\mathbf{3}}$．

4. U(3) 群表示按 S_3^a 不可约表示分解

“色空间”群 S_3^a 是“色空间”的幺正变换群 $U(3)$ 的一个子群．因此，$U(3)$ 群的表示可以按 S_3^a 的不可约表示分解．

先讨论 $U(3)$ 群元素的分类，对于任一个 $U(3)$ 变换 M，我们总可以找到另一个 $U(3)$ 变换 S，使 $SMS^{-1} = M'$ 为一对角矩阵．于是 M 和 M' 互为共轭元素，属于同一个类，而 M' 实际上是色规范群 $U(\boldsymbol{\alpha})$ 的元素[6]．因而 $U(3)$ 群同 $U(\boldsymbol{\alpha})$ 群有同样多的类，每一个类用三个参数表征，$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 或者 $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2)$．

属于 S_3^a 群 $(1^3; \beta_0, \beta_1, \beta_2)$ 类的元素，在 $U(3)$ 中显然就属于 $(\beta_0, \beta_1, \beta_2)$ 类．属于 S_3^a 群 $(1, 2; \beta_0, 0, \beta_2)$ 类的元素，以 $\left(C_3|\beta_0 + \frac{1}{3}\beta_2, \beta_0 + \frac{1}{3}\beta_2, \beta_0 - \frac{2}{3}\beta_2\right)$ 为典型代表，经过适当的 $U(3)$ 相似变换，可以知道它属于 $U(3)$ 群的 $\left(\beta_0 \pm \frac{\pi}{3}, +\pi, \beta_2 \pm \frac{\pi}{2}\right)$ 类．属于 S_3^a 群 $(3; \beta_0, 0, 0)$ 类的元素，以 $(C_+|\beta_0, \beta_0, \beta_0)$ 为典型代表，同样可确定属 $U(3)$ 群的 $\left(\beta_0, +\frac{2}{3}\pi, +\pi\right)$ 类．

$U(3)$ 群的不可约表示用三个满足条件

$$f_1 \geqslant f_2 \geqslant f_3$$

的整数来代表．其特征标 $\chi(f_1, f_2, f_3)$ 可表为[6]

$$\chi(f_1, f_2, f_3) = \frac{\xi(f_1, f_2, f_3)}{\xi(0, 0, 0)} \tag{47}$$

其中

$$\xi(f_1, f_2, f_3) = \sum_C \delta_C \exp i(C\mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\alpha}) \tag{48}$$

$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 是类的标志，$\mathbf{l} = (l_1, l_2, l_3) = (f_1 + 2, f_2 + 1, f_3)$，$C\mathbf{l}$ 是 $\mathbf{l}$ 通过各种置换 C 所得的等价矢量．求和遍布 S_3 的所有置换，$\delta_C = \pm 1$，按置换的偶奇性．

这样我们就容易通过特征标的方法给出 $U(3)$ 的不可约表示 $D(f_1, f_2, f_3)$ 按照 S_3^a 的不可约表示 $D^{[d]}_{k_1, k_2, k_3}$ 的分解．下面列出一些低维表示的分解结果

“层子表示”$(N_0 = f_1 + f_2 + f_3 = k_1 + k_2 + k_3 = \pm 1)$

$$\begin{aligned} \chi(1, 0, 0) &= \chi^{[2]}_{1,0,0} \\ \chi(0, 0, -1) &= \chi^{[2]}_{0,0,-1} \end{aligned} \tag{49}$$

“介子表示”$(N_0 = 0)$

$$\chi(0, 0, 0) = \chi^{[3]}_{0,0,0} \tag{50}$$

$$\chi(1, 0, -1) = \chi^{[1]}_{1,0,-1} + \chi^{[2,1]}_{0,0,0} \tag{51}$$

“双层子表示”$(N_0 = 2)$

$$\chi(1, 1, 0) = \chi^{[1^2]}_{1,1,0} \tag{52}$$

$$\chi(2, 0, 0) = \chi^{[2]}_{2,0,0} + \chi^{[2]}_{1,1,0} \tag{53}$$

“重子表示”$(N_0 = 3)$

$$\chi(1, 1, 1) = \chi^{[1^3]}_{1,1,1} \tag{54}$$

$$\chi(2, 1, 0) = \chi^{[1]}_{2,1,0} + \chi^{[2,1]}_{1,1,1} \tag{55}$$

$$\chi(3, 0, 0) = \chi^{[2]}_{3,0,0} + \chi^{[1]}_{2,1,0} + \chi^{[3]}_{1,1,1} \tag{56}$$

还可以给出一些高维表示的例．每个特征标下面给出表示的维数．

$$\begin{array}{ccccccccccccc} \chi(2,0,-2) & = & \chi^{[1]}_{2,0,-2} & + & \chi^{[2]}_{2,-1,-1} & + & \chi^{[2]}_{1,1,-2} & + & 2\chi^{[1]}_{1,0,-1} & + & \chi^{[2,1]}_{0,0,0} & + & \chi^{[3]}_{0,0,0} \\ \mathbf{27} & & \mathbf{6} & & \mathbf{3} & & \mathbf{3} & & \mathbf{6} & & \mathbf{2} & & \mathbf{1} \end{array} \tag{57}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc} \chi(3,1,-1) & = & \chi^{[1]}_{3,1,-1} & + & \chi^{[1^2]}_{3,0,0} & + & \chi^{[1^2]}_{2,2,-1} & + & 2\chi^{[1]}_{2,1,0} & + & \chi^{[2,1]}_{1,1,1} & + & \chi^{[1^3]}_{1,1,1} \\ \mathbf{27} & & \mathbf{6} & & \mathbf{3'} & & \mathbf{3'} & & \mathbf{6} & & \mathbf{2} & & \mathbf{1'} \end{array} \tag{57'}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} \chi(4,-1,-3) & = & \chi^{[1]}_{4,-1,-3} & + & \chi^{[1^2]}_{4,-2,-2} & + & \chi^{[1]}_{3,0,-3} & & \\ \mathbf{81} & & \mathbf{6} & & \mathbf{3'} & & \mathbf{6} & & \\ & + & 2\chi^{[1]}_{3,-1,-2} & + & \chi^{[1]}_{2,1,-3} & + & 2\chi^{[1]}_{2,0,-2} & & \\ & & \mathbf{6} & & \mathbf{6} & & \mathbf{6} & & \\ & + & 2\chi^{[1^2]}_{2,-1,-1} & + & \chi^{[2]}_{2,-1,-1} & + & \chi^{[2]}_{1,1,-2} & & \\ & & \mathbf{3'} & & \mathbf{3} & & \mathbf{3} & & \\ & + & \chi^{[1^2]}_{1,1,-2} & + & 3\chi^{[1]}_{1,0,-1} & + & \chi^{[2,1]}_{0,0,0} & + & \chi^{[1^3]}_{0,0,0} \\ & & \mathbf{3'} & & \mathbf{6} & & \mathbf{2} & & \mathbf{1'} \end{array} \tag{58}$$

等等．

5. 对易算符集

如前所述，S_3^q 的不可约表示由 $\mathbf{k}$ 矢量的“星集”和小群的不可约表示所唯一确定．

一个“星集”中包含有 q 个 $\mathbf{k}$ 矢量，这些矢量具有相同的 N_0 量子数[这是与 $U(\beta_0)$ 是 S_3^q 的不变子群这件事直接联系着的]，而有不同的“权矢量” $\mathbf{m}$．换言之，$\mathbf{k}$ 的“星集”就是具有相同 N_0 的所有等价“权矢量”的集合．实际上，可以引入一组互相对易的算符来标志一个“星集”．除了算符 N_0 以外其它两个算符可取作

$$\mathscr{C}_0 = \frac{1}{4}(\lambda_3^2 + \lambda_8^2) \tag{59}$$

和

$$\mathscr{C}_1 = \frac{1}{8}\lambda_8(\lambda_8^2 - 3\lambda_3^2) \tag{59'}$$

容易证明，N_0、$\mathscr{C}_0$ 和 $\mathscr{C}_1$ 同 S_3^q 的所有元素对易，从而互相对易．对于表示 $D_{\mathbf{k}}^q$，这三个算符具有确定的本征值

$$\begin{gathered} N_0 = k_1 + k_2 + k_3 \\ \mathscr{C}_0 = \frac{1}{3}(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 - k_1k_2 - k_2k_3 - k_3k_1) \\ \mathscr{C}_1 = \frac{1}{6\sqrt{3}}(k_1 + k_2 - 2k_3)(k_2 + k_3 - 2k_1)(k_3 + k_1 - 2k_2) \end{gathered} \tag{60}$$

对于第一种表示类别　　$\mathbf{k} = (a, a, a)$，　$\mathscr{C}_0 = \mathscr{C}_1 = 0$；

对于第二类别　　$\mathbf{k} = (a, a, b)$，　$\mathscr{C}_0^3 = \mathscr{C}_1^2$.

对于 S_3^q 的表示 $\mathbf{3}$、$\mathbf{3'}$（属于第二类别）和表示 $\mathbf{6}$（属于第三类别），小群表示是一维的，一个表示内的不同状态就是一个“星集”中不同的 $\mathbf{k}$ 矢量，用“权矢量” $\mathbf{m}$ 就足以把它们区别开来．在第一类别中，表示 $\mathbf{1}$ 和 $\mathbf{1'}$ 本身都是一维的，只包含一个状态；表示 $\mathbf{2}$ 包含有两个状态，同时对应于“权矢量” $\mathbf{m} = 0$，我们用算符 C_3 的本征值 ± 1 来区分这两个状态．由于 $[C_3, Y] = 0$，而 $\{C_3, I_0\} = 0$，所以对一般“权矢量” $\mathbf{m}$ 非零的表示，不能同时用 C_3

和 I_0 来标志状态,只有 $I_0=0$ 的那些态才同时具有确定的 C_3 量子数.

四、简单的物理应用

利用前两节的结果,我们可以作一些简单的物理讨论.

1. 粒子分类

层子应属于不可约表示 $D^{[2]}_{1,0,0}=\mathbf{3}$

反层子属于不可约表示 $D^{[2]}_{0,0,-1}=\bar{\mathbf{3}}$.

一对正反层子所组成的介子,应属于表示 $\mathbf{3}\otimes\bar{\mathbf{3}}$, 按(39)式,就是

$$D^{[3]}_{0,0,0}=\mathbf{1},\quad D^{[2,1]}_{0,0,0}=\mathbf{2}\quad 以及\quad D^{[1]}_{1,0,-1}=\mathbf{6}.$$

三个层子组成的重子,应属于表示 $\mathbf{3}\otimes\mathbf{3}\otimes\mathbf{3}$, 按(46)式,就是

$$D^{[1^3]}_{1,1,1}=\mathbf{1}',\quad D^{[2,1]}_{1,1,1}=\mathbf{2},\quad D^{[3]}_{1,1,1}=\mathbf{1},\quad D^{[1]}_{2,1,0}=\mathbf{6}\quad 以及\quad D^{[2]}_{3,0,0}=\mathbf{3}.$$

其它多层子束缚态可按同样的方法确定它们所属的"色空间"群表示.

2. 超强相互作用和它的饱和性

假定束缚层子的超强相互作用是通过传递胶子进行的,那么按以上讨论,胶子也应当属于 S^a_3 的表示 $D^{[3]}_{0,0,0}=\mathbf{1}$, $D^{[2,1]}_{0,0,0}=\mathbf{2}$ 和 $D^{[1]}_{1,0,-1}=\mathbf{6}$. 无论层子在"色空间"的电荷如何规定,属于表示 **1** 和 **2** 的胶子总是中性的,属于表示 **6** 的胶子则可能带电,也可能有中性的,依电荷算符的规定而异. 如果深度非弹过程原先的实验结果可信的话,胶子属于不可约表示 **1** 和 **2** 的可能性较大.

借用在 $SU(3)$ 群中熟悉的符号,可以把 S^a_3 不变的层子—胶子相互作用写成下列形式

$$\mathscr{H}=g_0\bar{q}q\varphi_0+g_1\sum_{\mu=3,8}\bar{q}\lambda_\mu q\varphi_\mu+g_2\sum_{\sigma=1,2,4,5,6,7}\bar{q}\lambda_\sigma q\varphi_\sigma \tag{61}$$

其中 $q=q^{(i)}\,(i=1,2,3)$ 代表层子; φ_0 代表属于表示 **1** 的胶子, $\varphi_\mu(\mu=3,8)$ 代表属于表示 **2** 的胶子, $\varphi_\sigma(\sigma=1,2,4,5,6,7)$ 代表属于表示 **6** 的胶子; g_0、g_1 和 g_2 是耦合常数,一般并不相等.

第一项不能给出我们所要求的饱和性, 因为每一个层子, 不论其颜色为何, 都具有"荷" g_0, 那么由三个层子组成的重子具有"荷" $3g_0$, 因而重子间的相互作用将比层子之间的作用强得多. 二、三两项给出的层子—层子势可以写成

$$V^{ij}=V_1(x^{ij})\sum_{\mu=3,8}\lambda^{(i)}_\mu\lambda^{(j)}_\mu+V_2(x^{ij})\sum_\sigma\lambda^{(i)}_\sigma\lambda^{(j)}_\sigma \tag{62}$$

$\lambda^{(i)}_\mu$ 和 $\lambda^{(j)}_\sigma$ $(\mu=3,8;\ \sigma=1,2,4,5,6,7)$ 是作用在层子 $q^{(i)}$ 上的无穷小算子, x^{ij} 是层子 $q^{(i)}$ 和层子 $q^{(j)}$ 之间的距离. 在矢量胶子的情形,层子—反层子势具有相同的形式.

在层子间的相互作用并不由胶子传递的情况,有可能仍由(62)近似描写层子间的相互作用. 在层子质量 M 很大的情形下,位势 V_1 和 V_2 的主要部分在强子内部是与 M 同量级的常数位阱,其作用只是抵消层子的大质量. 这一部分可以直接计算出来,对于由 n 个层子和反层子组成的体系,位能是

$$V=2\bar{V}_1\left(\mathscr{C}_0-n\cdot\frac{1}{3}\right)+2\bar{V}_2\left[(\mathscr{C}_2-\mathscr{C}_0)-n\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\right)\right] \tag{63}$$

其中 $\mathscr{C}_0$ 是 S_3^a 的算符 (58)，其本征值由 (60) 式给出，$\mathscr{C}_3$ 则是 $SU(3')$ 群的卡西米尔算符，对于 $SU(3)'$ 群的不可约表示 $D(\lambda, \mu)$ 其本征值为

$$\mathscr{C}_2 = \frac{1}{3}(\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2) + (\lambda + \mu) \tag{64}$$

最简单的情形，$\bar{V}_2 = 0$, $\bar{V}_1 > 0$，我们得到文 [1] 的结果. 同种颜色的层子之间互相排斥，正反层子对之间互相吸引，两者强度相等；不同颜色的层子间则互相吸引，层子对之间互相排斥，强度亦相等，且同为前者之半. 任何两个紧束缚的强子之间都没有超强相互作用. 体系的能级按照 $\mathbf{k}$ 矢量的“星集”分裂. 对于同样数目的层子反层子体系，“权矢量” $\mathbf{m}$ 的长度越小的，能级越低. 最低超强能级的介子态是属于表示 $D^{[3]}_{0,0,0} = \mathbf{1}$ 的

$$\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(q^{(1)}\bar{q}^{(1)} + q^{(2)}\bar{q}^{(2)} + q^{(3)}\bar{q}^{(3)})$$

和属于表示 $D^{[2,1]}_{0,0,0} = \mathbf{2}$ 的

$$\varphi_8 = \frac{1}{\sqrt{6}}(q^{(1)}\bar{q}^{(1)} + q^{(2)}\bar{q}^{(2)} - 2q^{(3)}\bar{q}^{(3)})$$

与

$$\varphi_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(q^{(1)}\bar{q}^{(1)} - q^{(2)}\bar{q}^{(2)})$$

属于表示 $D^{[1]}_{1,0,-1} = \mathbf{6}$ 的正反层子对则因互相排斥而不构成束缚态. 处于最低超强能级的重子态是由三种不同颜色的层子组成的，这个能级是六重简并的，与体系的对称性无关. 普通的重子可能属于其中颜色反对称状态 $D^{[1^3]}_{1,1,1} = \mathbf{1'}$，则它们在自旋和通常 $SU(3)$ 空间处于对称状态；普通的介子可能是属于表示 $\mathbf{1}$ 的 φ_0，新介子可能属于“色空间”群的表示 $\mathbf{2}$, φ_8 和 φ_3；新重子可能属于其它五个不同颜色层子组成的重子态.

应当指出，介子的湮灭图形和位阱的非常数部分则引起能级按小群表示的分裂，这一点我们将另作讨论.

当 $\bar{V}_2 = \bar{V}_1 > 0$ 时，能级按 $SU(3)'$ 群的不可约表示分裂，超强作用仍是饱和的，我们得到南部的分类方案[4].

一般 $\bar{V}_2 \neq \bar{V}_1 \neq 0$ 时能级的分裂较为复杂.

下面两个图分别给出介子(不考虑湮灭图形的贡献)和重子的能级分裂. 能级边上圆括弧中注的是 S_3^a 的不可约表示，无括弧的黑体数字是 $SU(3)'$ 的不可约表示.

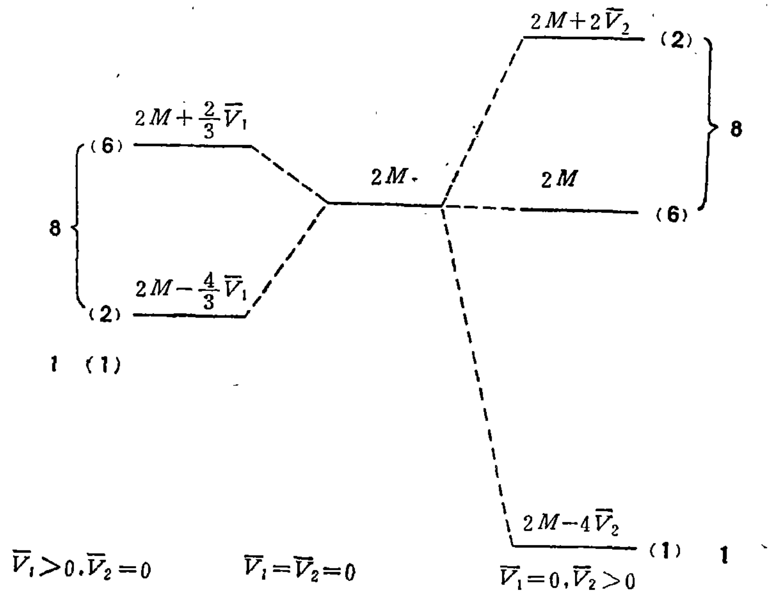
如果对称性有一定的破坏，$q^{(3)}$ 和 $q^{(1)}$、$q^{(2)}$ 有所不同，(62) 式的相互作用位势应改为

$$V^{ij} = V_1(x^{ij})\lambda_3^{(i)}\lambda_3^{(j)} + V_1'(x^{ij})\lambda_8^{(i)}\lambda_8^{(j)} + V_2(x^{ij})\sum_{\sigma=1,2}\lambda_\sigma^{(i)}\lambda_\sigma^{(j)} + V_2'(x^{ij})\sum_{\sigma=4,5,6,7}\lambda_\sigma^{(i)}\lambda_\sigma^{(j)} \tag{62'}$$

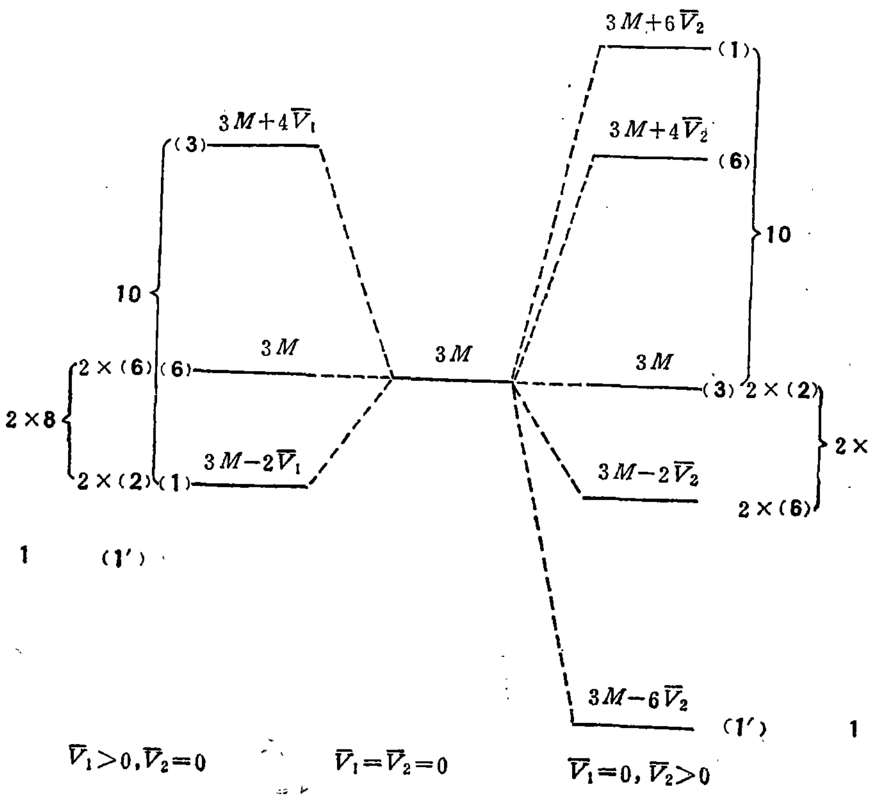
3. 新介子的强相互作用性质

假定 S_3^a 对称性很好成立，并考虑到普通的 $SU(3)$ 对称性，强子应按 $SU(3)\otimes S_3^a$ 的不可约表示分类. 普通重子属于表示 $(\mathbf{8}\oplus\mathbf{10}, \mathbf{1'})$ 普通介子属于表示 $(\mathbf{1}\oplus\mathbf{8}, \mathbf{1})$，而新介子可能属于表示 $(\mathbf{1}\oplus\mathbf{8}, \mathbf{2})$. 逗点前面是普通 $SU(3)$ 表示，逗点后是 S_3^a 表示.

按前一节所给的方法，可得



介子($q\bar{q}$)的能级



重子(qqq)的能级

$$\begin{aligned} \{D_{0,0,0}^{[2,1]2}\} &= D_{0,0,0}^{[3]} \oplus D_{0,0,0}^{[2,1]} \oplus D_{0,0,0}^{[1^3]} \\ \{D_{0,0,0}^{[2,1]3}\} &= D_{0,0,0}^{[3]} \oplus 3D_{0,0,0}^{[2,1]} \oplus D_{0,0,0}^{[1^3]} \end{aligned} \tag{65}$$

等等．我们立刻可以知道:

(i) 新介子不能衰变成普通介子或普通重子对． 反之，新介子不能由普通强子单个产生．

(ii) 新介子的衰变产物中至少包含一个新介子，例如它可以衰变成一个新介子加上若干普通强子，或者衰变成两个新介子等等．反之，在足够高的能量时，新介子可在普通强子的碰撞中成对产生，在更高的能量下，可以三个、四个以上协同产生．

(iii) 属于表示 **2** 的新介子，有两种色组态，φ_8 和 φ_3． C_3 量子数对 φ_8 为 $+1$，对 φ_3 为 -1． S_3^a 对称作用当然是 C_3 守恒的，因而 φ_8 和 φ_3 中都至少有一个粒子对强相互作用是稳定的，只能通过电磁相互作用或弱相互作用衰变．

即使 S_3^a 受到某种破坏，只要 C_3 守恒，φ_3 中至少有一个粒子是稳定的，只能成对产生．

4. 两点看法

通过前面的讨论，我们可以提出两点粗浅的看法:

(i) 层子在颜色空间的自由度，作为一种自由度，其"禁闭"总是相对的、有条件的．在另外的条件下，这种自由度总将解放出来．自然，新的和老的粒子究竟相应于什么样的色组态，在色空间具有什么样的性质，则依赖于具体的物理假定，须要根据实验情况作深入的研究，我们无法在这里一一予以讨论．

(ii) 层子在颜色空间的对称性最基本的可能就是这里讨论的 S_3^a 的对称性，而不必具有 $SU(3)'$ 那样高的对称性．因此在色空间中层子的超强相互作用、电荷算符以及弱相互作用等等，一般并不须要同普通的 $SU(3)$ 性质有多大的相似性．

参　考　资　料

[1] 李综，卞震，习成，物理学报，**24** (1975)，372．

[2] 刘耀阳，原子能，**3** (1966)，232．

[3] 高崇寿，«高能双选反应不变质量分析中新现象的讨论和层子模型»，本期 92 页．

[4] M. Han, Y. Nambu, *Phys. Rev.*, **139B** (1965), 1006.

[5] R. E. Behrends, et al., *Rev. Mod. Phys.*, **34** (1962), 1; M. Gell-Mann, *Phys. Rev.*, **125** (1962), 1067.

[6] H. Weyl, *Classical Groups* (Princeton, New Jesrey, 1946).

THE SYMMETRY OF STRATONS IN "COLOR SPACE"

ELEMENTARY PARTICLE THEORY GROUP, DEPARTMENT OF PHYSICS, PEKING UNIVERSITY

ABSTRACT

In this paper, the color symmetry of stratons for a theoretical model[1] proposed some times ago is investigated. This symmetry contains two kinds of transformations, the first is color gauge transformations which leave the color mumber of stratons conserved, the second is color permutations which indicate the equivaluence of different color stratons. The structure of this symmetry group (S_3^α) is investigated. The irreducible representations (*IR's*) of S_3^α and the reduction of their direct product are given. The relation between *IR's* of S_3^α and those of color $U(3)$ group is discussed.

In a simplest physical model only two neutral vector gluons are needed and the super-strong interactions among stratons exhibit saturation properties similar to but somewhat different from the case of the Han-Nambu model. Not only the color singlet, but also other color neutral states belonging to *IR's* **2** or **1** of S_3^α all belong to the lowest energy level of the super-strong interactions. If there were eight degenerate vector gluons belonging to *IR's* **2** and **6**, the Han-Nambu model would be reproduced.